# AMPLIACION DE MATEMATICAS

D. Rafael Portaencasa Baeza

I.S.B.N.: 84-85632-27-3
Depósito Legal.: M-34112-1981

Imprime,Edita y Distribuye:Dpto.Publicaciones de la Facultad de Informática
Bajo el patrocinio de la Fundación General de la Universidad Politécnica
Madrid.

INDICE

LECCION 10.- ECUACIONES DIFERENCIALES DE ORDEN SUPERIOR AL PRIMERO. DIFERENTES TIPOS.



LECCION 11.- SOLUCIONES DE ECUACIONES DIFERENCIALES MEDIANTE SERIES.



LECCION 12.- PROBLEMAS DE CONTORNO.

LECCION 13.- SISTEMAS DE ECUACIONES DIFERENCIALES

# Introducción

# INTRODUCCION

## 1.- Bosquejo histórico de los conceptos fundamentales.-

El desarrollo de la noción moderna de integral está estrechamente relacionado con la evolución de la idea de función y con el estudio a fondo de las funciones numéricas de variables reales, que se ha venido realizando desde principios del siglo XIX. Euler concebía ya la noción de función de una forma bastante general, puesto que para él una curva "arbitraria" que es cortada en un único punto por toda paralela al eje Oy define una función y = f(x), pero se niega a admitir que tales funciones puedan expresarse "analíticamente". Este punto de vista no se modificó demasiado hasta los trabajos de Fourier, pero el descubrimiento por este último de la posibilidad de representar funciones discontinuas como sumas de series trigonométricas iba a ejercer una influencia decisiva sobre las generaciones siguientes. Es necesario añadir que las demostraciones de Fourier carecían de todo rigor, y que su dominio de validez no aparecía claramente; sin embargo, las fórmulas integrales

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{+\pi} \varphi(x)\cos nx dx, \quad b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{+\pi} \varphi(x) \operatorname{sen} nx dx \quad (n \geqslant 1) \qquad (1)$$

que proporcionan los corficientes del desarrollo de $\varphi(x)$ en serie de Fourier, tenían un sentido intuitivo evidente desde el momento que se suponía que $\varphi$ era continua y monótona a trozos. También Dirichlet se limita en principio a estas funciones en la célebre memoria en la que establece la convergencia de la serie de Fourier, pero ya al final de su trabajo se preocupa de la extensión de sus resultados a clases más amplias de funciones. Es sabido que fué en esta ocasión cuando Dirichlet, precisando las ideas de Fourier, define la noción general de función tal y como se entiende hoy; el primer punto a dilucidar era naturalmente el de saber en qué casos seguía siendo posible dar un sentido a las fórmulas (1). "Cuando las soluciones de continuidad de $\varphi$ son infinitas" dice Dirichlet, "es necesario que entonces la función $\varphi(x)$ sea tal que, si designamos por a y b dos cantidades cualesquiera comprendidas entre $-\pi$ y $+\pi$, puedan encontrarse siempre otras cantidades r y s entre a y b lo bastante próximas para que la función sea continua en el intervalo entre r y s. Se sentirá fácilmente la necesidad de esta restricción al considerar que los diferentes términos de la serie de Fourier son integrales definidas y remontándose a la noción fundamental de integral. Se verá entonces - que la integral de una función no tiene otro significado que el de que la función satisface la condición enunciada anteriormente.

En términos modernos, Dirichlet parece creer que la integrabilidad es equivalente al hecho de que los puntos de discontinuidad formen un conjunto "diseminado".

Riemann, en 1.854 vuelve a considerar la cuestión (siempre a propósito de las series trigonométricas) y siente la necesidad de justificar su trabajo:"Cualquiera que sea nuestra ignorancia respecto a la manera según la cual las fuerzas y los estados de la materia varían con el tiempo y el lugar en el infinitamente - pequeño, podemos tener por seguro que las funciones a las que no son aplicables los resultados de Dirichlet no intervienen en los fenómenos naturales. Sin embargo, parece que estos casos no tratados por Dirichlet son dignos de atención por dos razones. Primeramente, este tema está muy estrechamente relacionado con los principios del cálculo infinitesimal, y puede servir para aportar mayor claridad y seguridad a estos principios. Desde este punto de vista, su estudio tiene - un interés inmediato. En segundo lugar, la aparición de las series de Fourier - no se limita a los trabajos de física, hoy día son aplicadas también con éxito en un dominio de las matemáticas puras, la teoría de números, y parece que aquí son precisamente las funciones cuyo desarrollo en serie trigonométrica no ha sido estudiado por Dirichlet las que ofrecen interés.

La idea de Riemann es la de partir del procedimiento de aproximación de la integral, cuya importancia fué señalada por Cauchy, y determinar cuándo las "sumas de Riemann" de una función f, en un intervalo acotado $[a, b]$ tienden hacia un límite (cuando la longitud máxima de los subintervalos de la división tiende - hacia 0), problema cuya solución obtiene sin gran trabajo en la siguiente forma: para cada $\alpha > 0$ existe una subdivisión de $[a, b]$ en intervalos parciales de longitud máxima suficientemente pequeña para que la suma de las longitudes de los intervalos de esta subdivisión en los que la oscilación de f es $> \alpha$, sea arbitrariamente pequeña. Y demuestra además que esta condición es verificada no solamente por las funciones continuas y monótonas a trozos, sino también por funciones que pueden tener un conjunto de puntos de discontinuidad denso.

La forma dada por Riemann a la condición de integrabilidad sugería la - idea de la "medida" del conjunto de puntos de discontinuidad de una función en un intervalo, pero todavía deberían transcurrir treinta años antes de que se llegase a dar una definición fecunda y cómoda de esta noción.

Los primeros intentos en esta dirección se deben a Stolz, Harnack y Cantor; para definir la "medida" de una parte E acotada de R, los dos primeros consideran conjuntos $F \supset E$ que sean uniones finitas de intervalos, toman para cada F la suma de las longitudes de los intervalos correspondientes, y llaman "medida" de E al extremo inferior de estos números; mientras que Cantor, situándose ya desde el principio en $R^n$, considera, para un conjunto E acotado y para $\varrho > 0$ el entorno $V(\varrho)$ de E formado por los puntos cuya distancia a E es $< \varrho$, y toma el extremo inferior del "volumen" de $V(\varrho)$. Con esta definición resulta que la "medida" de un conjunto es igual a la de su adherencia, de donde se deduce en particular que la "medida" de la unión de dos conjuntos sin puntos comunes puede ser estrictamente inferior a la suma de las "medidas" de estos dos conjuntos. Peano y Jordan introducen, al lado de la "medida" de Cantor $\mu(A)$ de un conjunto A contenido en un "rectángulo" I, su "medida interior" $\mu(I)-\mu(I-A)$ y llaman "medibles" a los conjuntos A (que ahora llamamos "cuadrables")para los cuales estos dos números coinciden. La unión de dos conjuntos cuadrables A y B sin puntos comunes es entonces cuadrable y tiene como "medida" la suma de las "medidas" de A y B, pero un conjunto abierto y acotado no es necesariamente cuadrable, y el conjunto de los números racionales contenidos en un intervalo acotado tampoco lo es, lo que quitaba mucho interés a la noción de Peano-Jordan.

A E. Borel corresponde el mérito de haber sabido discernir los defectos de las definiciones anteriores y de haber visto la forma de remediarlos. Se sabía desde Cantor que todo conjunto abierto U de R es la unión de la familia numerable de sus "componentes", intervalos abiertos tales que dos cualesquiera de ellos no tienen ningún punto común; en vez de intentar aproximar U "desde fuera", encerrándolo en una sucesión finita de intervalos, Borel, apoyándose en el resultado anterior, propone tomar como medida de U (cuando U es acotado) la suma de las longitudes de sus componentes. Después describe muy sumariamente las clases de conjuntos (llamados más tarde "borelianos") que se pueden obtener a partir de los conjuntos abiertos, iterando indefinidamente las operaciones de unión numerable y de "diferencia" A-B e indica que, para estos conjuntos, se puede definir una medida que posee la propiedad fundamental de la aditividad completa: si una sucesión $(A_n)$ está formada por conjuntos borelianos disjuntos dos a dos, la medida de su unión (supuesto que es acotada) es igual a la suma de sus medidas.

Esta definición debía inaugurar una nueva era del Análisis: por una parte, en relación con los trabajos contemporáneos de Baire, era el punto de partida de toda una serie de trabajos de naturaleza topológica acerca de la clasificación de los conjuntos de puntos y, sobre todo, serviría de base para la extensión de la noción de integral, llevada a cabo por Lebesgue en los primeros años del siglo XX.

Lebesgue comienza por desarrollar y precisar las suscintas indicaciones de E. Borel; a imitación del método de Peano-Jordan, la "medida exterior" de un conjunto acotado $A \supset R$ se define como el extremo inferior de las medidas de los conjuntos abiertos que contienen A; después, si I es un intervalo que contiene a A, la "medida interior" de A es la diferencia entre las medidas exteriores de I y de I-A, de este modo se obtiene una noción de "conjunto medible" que solamente difiere de la definición "constructiva" inicial de Borel por el hecho de añadir una parte de un conjunto de medida nula en el sentido de Borel. Esta definición se extendía inmediatamente a los espacios $R^n$, la antigua concepción de la integral definida $\int_a^b f(t)dt$ de una función acotada y $\geqslant 0$ como "área" limitada por la curva $y = f(x)$ las rectas $x = a$, $x = b$ e $y = 0$, proporcionaba entonces una extensión inmediata de la integral de Riemann a todas las funciones para las que estuviese definida la medida del conjunto precedente. Pero la originalidad de Lebesgue no reside tanto en la idea de esta extensión como en su descubrimiento del teorema fundamental sobre el paso al límite en la integral así concebida, teorema que aparece en él como consecuencia de ser la medida completamente - de su importancia y hace de él, la piedra angular de la exposición didáctica de su teoría que realiza en sus célebres "Leçons sur l'intégration et la recherche des fonctions primitives" ("Lecciones sobre la integración y el cálculo de funciones primitivas").

No podemos aquí detenernos a describir detalladamente los innumerables progresos que supondrían los resultados de Lebesgue en el estudio de los problemas clásicos del cálculo infinitesimal. El mismo había aplicado ya, en su tesis, su teoría a la extensión de las nociones clásicas de longitud y de área a conjuntos más generales que las curvas y superficies usuales. Mencionemos también las aplicaciones a las series trigonométricas, desarrolladas por Lebesgue casi inmediatamente después de su tesis y que abrirían nuevos horizontes en esta teoría, cuya exploración está lejos de haberse terminado. Por último, y fundamentalmente, la definición de los espacios $L^p$ y el teorema de Fischer-Riesz, ponían en evidencia el papel que podía tener en el Análisis funcional la nueva noción de integral, papel que no haría otra cosa que crecer con las generalizaciones posteriores de esta noción, de las que hablaremos después.

Antes de esto nos detendremos un poco más extensamente en uno de los problemas a los que Lebesgue dedicó más esfuerzos, la relación entre las nociones de integral y de primitiva. Con motivo de la generalización de la integral introducida por Riemann se había planteado de un modo natural la cuestión de saber si la correspondencia clásica entre integral y primitiva, válida para las funciones continuas, seguía siéndolo en casos más generales. Es fácil sin embargo dar ejemplos de funciones integrables en el sentido de Riemann y tales que $\int_a^x f(t)dt$ no tenga derivada (ni siquiera derivada a la derecha o a la izquierda) en ciertos puntos; recíprocamente, mediante un análisis extraordinariamente sutil (para el que no era suficiente, ni mucho menos, el teorema del paso al límite en la integral). Lebesgue consiguió demostrar que, si f es integrable (en su sentido) en $[a,b]$, $F(x) = \int_a^x f(t)dt$ tiene en casi todo punto una derivada igual a $f(x)$. Recíprocamente, si una función g es derivable en $[a,b]$ y si su derivada $g' = f$ es acotada, entonces f es integrable y se tiene la fórmula $g(x) - g(a) = \int_a^x f(t)dt$. Pero Lebesgue señala que el problema es mucho más complejo cuando $g'$ no es acotada, en este caso $g'$ no es necesariamente integrable, y el primer problema era por tanto el de caracterizar las funciones continuas g para las que $g'$ existe en casi todo punto y es integrable. Limitándose al caso en que uno de los "números derivados" de g es siempre finito, Lebesgue mostró que g es entonces necesariamente una función de variación acotada. Finalmente establece una recíproca de este último resultado: una función de variación acotada g admite en casi todo punto una derivada, y $g'$ es integrable, pero ya no se tiene necesariamente

$$g(x) - g(a) = \int_a^x g'(t)dt \qquad (2)$$

la diferencia entre los dos miembros de esta relación es una función de variación acotada no constante y su derivada es nula en casi todo punto (función "singular"). Faltaba caracterizar las funciones de variación acotada g tales que se verifique la relación (2). Lebesgue estableció que estas funciones son aquellas que poseen la propiedad siguiente: la variación total de g en un conjunto abierto U (suma de las variaciones totales de g en cada una de las componentes conexas de U) tiende a 0 con la medida de U.

Veremos después cómo estos resultados, bajo una forma más débil, adquirirían más tarde un alcance mucho más general. En su forma inicial, su campo de aplicación era bastante restringido, y no superaba el marco de la teoría de las funciones de variables reales.

Uno de los avances esenciales aportados por la teoría de Lebesgue se refiere a las integrales múltiples. Esta noción había sido introducida hacia mediados del siglo XVIII y lo fué primeramente en la forma de "integral indefinida" (por analogía con la teoría de la integral para las funciones de una variable, $\iint f(x, y)dxdy$ designa una solución de la ecuación $\partial^2 z/\partial x\partial y = f(x, y)$ pero ya tiene Euler una concepción muy clara de la integral doble extendida a un dominio acotado (limitado por arcos de curvas analíticas), y escribe correctamente la fórmula que permite calcular una integral de este tipo mediante dos integrales simples sucesivas. No era difícil justificar esta fórmula a partir de "sumas de Riemann" mientras la función integrada fuese continua y el dominio de integración no demasiado complicado, pero a partir del momento en que se querían abordar casos más generales, el procedimiento de Riemann encontraba ciertas dificultades ($f(x, y)$ puede ser integrable en el sentido de Riemann sin que $\int dx \int f(x, y)dy$ tenga sentido, considerando las integrales simples en el sentido de Riemann). Estas dificultades desaparecen cuando se pasa a la definición de Lebesgue, ya este último había mostrado en su tesis que, cuando $f(x, y)$ es una "función de Baire" acotada, también lo son las funciones $y \to f(x, y)$ (para todo $x$) y $x \to \int f(x, y)dy$, y se tiene la fórmula

$$\iint f(x, y)\, dxdy = \int dx \int f(x, y)dy \tag{3}$$

(integral tomada sobre un rectángulo). Fubini aporta un complemento importante a este resultado demostrando que, si se supone solamente que $f$ es integrable, entonces el conjunto de las $x$ tales que $y \to f(x, y)$ no es integrable, es de medida nula, lo que permitiá extender inmediatamente la fórmula (3) a este caso.

Finalmente, Lebesgue aborda la extensión a las integrales múltiples de sus resultados acerca de las derivadas de las integrales simples. De este modo, asocia a una función $f$, integrable en toda parte compacta de $R^n$, la función de conjunto $F(E) = \int_E f(x)dx$, definida para toda parte integrable $E$ de $R^n$, que generaliza el concepto de "integral indefinida", y señala con este motivo que esta función posee las dos propiedades siguientes: 1º es completamente aditiva; 2º es "absolutamente continua" en el sentido de que $F(E)$ tiende a 0 con la medida de

E. La parte fundamental de la memoria de Lebesgue consiste en demostrar la proposición recíproca de ésta. Pero no se detiene aquí, y, hace notar la posibilidad de generalizar la noción de función de variación acotada, considerando las funciones de conjunto medible F(E) completamente aditivas y tales que $\sum_n |F(E_n)|$ permanezca acotada para toda partición numerable de E en partes medibles $E_n$. Y, si bien se limita a considerar solamente funciones de esta clase en el conjunto de los "rectángulos" de $R^n$, está bien claro que solamente había que dar un paso para llegar a la noción general de medida que va a definir J. Randon en 1.913, englobando en una misma síntesis la integral de Lebesgue y la integral de Stieltjes, de la que vamos a hablar ahora.

T. Stieltjes publica, con el título "Recherches sur les fractions continues" ("Investigaciones sobre las fracciones continuas"), una memoria en la que, apartir de una cuestión aparentemente muy particular, se planteaban y resolvían, con gran elegancia, problemas de naturaleza completamente nueva en la teoría de funciones analíticas y en la de funciones de una variable real. Buscando una representación del límite de una cierta sucesión de funciones analíticas, Stieltjes, entre otros, se había visto llevado a introducir, sobre la recta, el concepto de una "distribución de masa" positiva, noción familiar desde mucho antes en las ciencias físicas, pero que hasta entonces solamente había sido considerada en matemáticas con una serie de hipótesis restrictivas (en general, la existencia de una "densidad" en todo punto, variando de forma continua); Stieltjes señala que una distribución de este tipo equivale a una función creciente $\varphi(x)$ que da la masa total correspondiente al intervalo de extremos 0 y x para $x > 0$, y esta masa cambiada de signo para $x < 0$, correspondiendo las discontinuidades de $\varphi$ a las masas "concentradas en un punto". Stieltjes forma entonces, para una distribución de este tipo en un intervalo $[a,b]$, las "sumas de Riemann" $\sum_i f(\xi_i)[\varphi(x_{i+1})-\varphi(x_i)]$ y demuestra que, cuando f es continua en $[a,b]$, estas sumas tienden hacia un límite que designa por $\int_a^b f(x)d\varphi(x)$. No necesitando integrar más que funciones continuas (e incluso derivables), Stieltjes no llevó más adelante el estudio de esta integral. Pero en 1.909, F. Riesz demostraba que las integrales de Stieltjes $f \rightarrow \int_a^b f d\varphi$ son los funcionales lineales continuos más generales sobre el espacio (I) de las funciones numéricas continuas sobre el intervalo $I = [a,b]$ (estando dotado (I) de la Topología de la convergencia uniforme y la elegancia y sencillez de este resultado suscitaron inmediatamente diversas generalizaciones; combinando las ideas de F. Riesz y de Lebesgue se mostró la forma de definir una integral mediante los procedimientos de Lebesgue partiendo de una "función de conjunto completamente aditiva" cualquiera (definida sobre los conjuntos medibles para la medida de Lebesgue) en vez de partir de la medida de Lebesgue. En la noción de "medida de Radon" sobre $R^n$ así definida estaba "incluida" la de función "de variación acotada": la descomposición de una función de variación acotada en diferencia de dos funciones crecientes es un caso particular de la descomposición de una medida en diferencia de dos medidas positivas; igualmente, la "medida de base $\mu$" corresponde a la noción de función "absolutamente continua", y la descomposición de una medida cualquiera en una medida de base $\mu$ y una medida "singular", a la descomposición de Lebesgue de una función de variación acotada en suma de una función absolutamente continua y una función "singular". Además, Radon demostró que la "densidad", respecto a $\mu$ de una medida de base $\mu$ sigue existiendo cuando $\mu$ es una medida que tiene como base la medida de Lebesgue, utilizando una idea anterior de F. Riesz, que consiste en contruir una imagen de la medida $\mu$ por medio de una aplicación $\vartheta$ de $R^n$ en R, elegida de tal modo que $\vartheta(\mu)$ sea la medida de Lebesgue sobre R.

Casi inmediatamente después de la aparición de la memoria de Radon, Fréchet señalaba que casi todos los resultados de este trabajo podrían extenderse al caso en que la "función de conjunto completamente aditiva", en vez de estar definida para las partes medibles de $R^n$, está definida para ciertas partes de un conjunto E cualquiera (estas partes deben ser tales que las operaciones de unión numerable y de "diferencia" den lugar a conjuntos para los que esté definida la función). Sin embargo, la expresión de una medida de base $\mu$ en la forma $g.\mu$ se apoyaba en Lebesgue y Radon en razonamientos en los que intervenía de modo decisivo la Topología de $R^n$ (y hemos visto que la demostración de Radon es válida solamente si $\mu$ es una medida que tiene como base la medida de Lebesgue), y hasta 1.930 no obtiene O. Nikodym este teorema en su forma general mediante un razonamiento directo (notablemente simplificado después por J. von Neumann gracias al empleo de las propiedades de los espacios $L^2$.

Con la memoria de Radon la teoría general de la integración puede considerarse como terminada en sus grandes líneas; entre los avances esenciales posteriores solamente podemos citar la definición de producto infinito de medidas, debido a Daniell, y la de integral de una función con valores en un espacio de Banach, dada por Bochner en 1.933, que anunciaba el estudio más general de la "integral débil" desarrollado algunos años después por Gelfand, Dunford y Pettis.

Pero todavía había que popularizar la nueva teoría y convertirla en una herramienta matemática de uso corriente, en tanto que la mayoría de los matemáticos, hacia 1.910 consideraban únicamente la "integral de Lebesgue" como un instrumento de alta precisión y de delicado manejo, destinado solamente a trabajos de sutileza y abstracción extremadas. Esta fué la obra de Carathéodory, en un libro que se consideró durante mucho tiempo como un clásico y que enriqueció además la teoría de Radon con numerosas observaciones originales.

Pero es también en este libro cuando, por primera vez, la noción de integral, que había sido una de las preocupaciones principales de Lebesgue, cede la primacía a la de medida, que para Lebesgue (como antes para Jordan) solo había sido un medio técnico auxiliar. Este cambio de punto de vista se debía, sin duda, en Carathéodory a la excesiva importancia que parece haber concedido a las "medidas p-dimensionales". A partir de entonces los autores que se han ocupado de la integración se han dividido entre estos dos puntos de vista, no sin originar una serie de debates. Los unos han seguido a Carathéodory; en sus exposiciones cada vez más abstractas y axiomatizadas, la medida, con todos los refinamientos técnicos a los que se presta, no solamente desempeña el papel principal, sino que tiende a perder contacto con las estructuras topológicas a las que está en realidad ligada en la mayor parte de los problemas en que interviene. Otras exposiciones siguen, más o menos, un método ya indicado por W.H. Young y desarrollado después por Daniell. El primero, al tratar la integral de Lebesgue, partía de la "integral de Cauchy" de las funciones continuas con soporte compacto, que se suponía conocida, para definir sucesivamente la integral superior de las funciones semicontinuas inferiormente y, después de las funciones numéricas cualesquiera, obteniéndose de esta manera una definición de las funciones integrables, calcada sobre la de Lebesgue para los conjuntos, por medios únicamente "funcionales". Daniell, en 1.918 extendió esta exposición, con algunas modificaciones, a funciones definidas en un conjunto cualquiera; dentro del mismo orden de ideas (y estrechamente relacionada con los métodos empleados en teoría espectral antes de Gelfand) debemos señalar también la memoria de F. Riesz que expone en una forma concisa y elegante los resultados de la teoría de los espacios ordenados que intervienen en la teoría de la Integración.

Más que en lo relativo a las obras expositivas, es en lo que se refiere a las aplicaciones donde debemos buscar los progresos realizados por la teoría de la integración desde 1.920: teoría de la probabilidad (en otro tiempo pretexto para adivinaciones y paradojas, y que se ha convertido en una rama de la teoría de la Integración desde su axiomatización por Kolmogorov, pero en una rama autónoma con sus métodos y problemas propios); teoría ergódica; teoría espectral y análisis armónico, desde el descubrimiento por Haar de la medida que lleva su nombre, y el movimiento de ideas provocado por este descubrimiento han hecho de la integral uno de los instrumentos más importantes en la teoría de grupos.

# 1

# Integral de Riemann–Stieltjes

# LECCION 1

## INTEGRAL DE RIEMANN-STIELTJES

### 1.- Definición.-

Consideremos un intervalo $[a,b] \in R$. Efectuemos una partición del mismo por los puntos:

$$a = x_0, x_1, x_2, \dots, x_{i-1}, x_i, \dots, x_n = b$$

siendo:

$$x_0 < x_1 < x_2 < \dots < x_{i-1} < x_i < \dots < x_n$$

En cada uno de los subintervalos $[x_{i-1}, x_i]$, elegimos un punto $\xi_i$:

$$x_{i-1} \leq \xi_i \leq x_i$$

Sean $f(x)$ y $\varphi(x)$ dos funciones reales, definidas y acotadas en $[a,b]$.

Se forma la expresión:

$$S = \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i).[\varphi(x_i) - \varphi(x_{i-1})]$$

que se llama suma de Riemann-Stieltjes de $f$ con respecto a $\varphi$.

Si esta suma admite límite finito para toda sucesión de particiones $P_1$, $P_2$... cuyos diámetros forman una sucesión nula, con independencia de los puntos $\xi_i$ elegidos, se llama a dicho límite integral de Riemann-Stieltjes de la función $f(x)$ (integrando), respecto de la función de distribución $\varphi(x)$ (integrador), en el intervalo $[a,b]$, y la representamos así:

$$\int_a^b f(x) \, . \, d\varphi(x)$$

En el caso particular de que $\varphi(x) = x$, nos queda la integral de Riemann:

$$\int_a^b f(x).dx$$

La integral de Riemann-Stieltjes permite la realización del estudio, con mayor generalidad que lo permitiría la de Riemann, de problemas de Estática en _os que la carga no sea de naturaleza continua ó de problemas de Estadística y Cálculo de Probabilidades en los que se manejen distribuciones continuas ó dis - continuas.

2. - Propiedades. -

2.1. - Propiedad aditiva de intervalos. -

De modo similar al utilizado para demostrar esta propiedad correspon - diente a la integral de Riemann, se puede establecer para las integrales de Rie - mann-Stieltjes, la siguiente propiedad:

$$\int_a^b f(x).d\,\varphi(x) + \int_b^c f(x).d\,\varphi(x) = \int_a^c f(x).d\varphi(x)\,, \quad \text{siendo} \quad a < b < c$$

2.2. - Propiedades de linealidad. -

a) Si f(x) y g(x) son integrables según R-S respecto de $\varphi(x)$, y $\underline{m}$ y $\underline{n}$ son constantes, se tiene:

$$\int_a^b (m.f(x)+n.g(x)).d\varphi(x) = m.\int_a^b f(x).d\,\varphi(x) + n.\int_a^b g(x).d\varphi(x)$$

b) Si f(x) es integrable según R-S respecto de $\varphi(x)$ y $\omega(x)$, se tiene:

$$\int_a^b f(x).d[m.\varphi(x)+n.\omega(x)] = m.\int_a^b f(x).d\varphi(x) + n.\int_a^b f(x).d\omega(x)$$

2.3. - Acotación. -

Si en $[a,b]$, la función f(x) está acotada, $|f(x)| < k$, se tiene:

$$\left|\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)[\varphi(x_i)-\varphi(x_{i-1})]\right| < k.\left|\sum_{i=1}^{n} [\varphi(x_i) - \varphi(x_{i-1})]\right| = k\,|\varphi(b)-\varphi(a)|$$

luego la integral según R-S, también está acotada.

2.4. - Integración por partes. -

En la integral de Riemann-Stieltjes existe una importante relación entre el integrado f(x) y el integrador $\varphi(x)$ y que es la siguiente:

Si existe la integral según R-S de f(x) respecto de $\varphi(x)$, también existe la integral según R-S de $\varphi(x)$ respecto de $f(x)$ en el mismo intervalo $[a,b]$, y se cumple la siguiente igualdad:

$$\int_a^b f(x)\ .\,d\varphi(x) + \int_a^b \varphi(x)\,.\,df(x) = f(b)\,.\,\varphi(b) - f(a)\,.\,\varphi(a)$$

Esta última igualdad se denomina fórmula de integración por partes.

Para demostrarla, como por hipótesis existe $\int_a^b f(x)d\varphi(x)$, se tiene que, dado un $\varepsilon > 0$, se verifica:

$$\left| \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)[\varphi(x_i) - \varphi(x_{i-1})] - \int_a^b f(x)\ .\ d\varphi(x) \right| < \varepsilon$$

$$x_{i-1} \leqslant \xi_i \leqslant x_i$$

Formamos la suma, eligiendo la misma partición:

$$\sum_{i=1}^{n} \varphi(\xi'_i)\,.\,[f(x_i) - f(x_{i-1})] = \sum_{i=1}^{n} \varphi(\xi'_i)\,.\,f(x_i) - \sum_{i=1}^{n} \varphi(\xi'_i)\,.\,f(x_{i-1}) \qquad (1)$$

$$x_{i-1} \leqslant \xi'_i \leqslant x_i$$

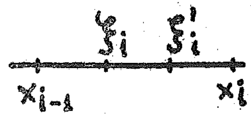
Escribimos la identidad:

$$H = f(b)\,.\,\varphi(b) - f(a)\,.\,\varphi(a) = \sum_{i=1}^{n} f(x_i)\,.\,\varphi(x_i) - \sum_{i=1}^{n} f(x_{i-1})\,.\,\varphi(x_{i-1}) \qquad (2)$$

Restando (1) y (2), se tiene:

$$H - \sum_{i=1}^{n} \varphi(\xi'_i)\,.\,[f(x_i) - f(x_{i-1})] = \sum_{i=1}^{n} f(x_i)[\varphi(x_i) - \varphi(\xi'_i)] + \sum_{i=1}^{n} f(x_{i-1})[\varphi(\xi'_i) - \varphi(x_{i-1})] =$$

$$= \sum_{k=1}^{k=2n} f(x_k)\,.\,[\varphi(x_k) - \varphi(x_{k-1})]$$




Esta última igualdad la hemos obtenido combinando las dos sumas anteriores en una sola, considerando la partición obtenida de la inicial $x_0, x_1, \ldots, x_{i-1}, x_i, \ldots, x_n$, al subdividirla con los puntos $\xi'_i$.

Como el segundo miembro tiene límite $\int_a^b f(x)\,.\,d\varphi(x)$ existe y se tendrá:

$$H - \int_a^b \varphi(x) \cdot df(x) = \int_a^b f(x) d\varphi(x)$$

$$H = \int_a^b \varphi(x) df(x) + \int_a^b f(x) \cdot d\varphi(x) = f(b) \cdot \varphi(b) + f(a) \cdot \varphi(a)$$

3.- Reducción a una integral de Riemann.-

Si existe la integral según R-S de $f(x)$ respecto a $\varphi(x)$, $\int_a^b f(x) d\varphi(x)$, y la función de distribución $\varphi(x)$ tiene una derivada $\varphi'(x)$ continua es $[a, b]$, podemos reducir la integral según R-S a una integral de Riemann, y se tiene:

$$\int_a^b f(x) \cdot d\varphi(x) = \int_a^b f(x) \cdot \varphi'(x) \cdot dx$$

Para demostrarlo, consideremos una partición $x_0, x_1, \ldots, x_{i-1}, x_i, \ldots, x_n$ y formemos la suma de R-S correspondiente a la integral del primer miembro, y le aplicamos el teorema del valor medio:

$$\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i) \cdot [\varphi(x_i) - \varphi(x_{i-1})] = \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i) \Delta x_i \cdot \varphi'(\alpha_i) \qquad (1)$$

siendo:

$$x_{i-1} \leqslant \xi_i \leqslant x_i ; \ \Delta x_i = x_i - x_{i-1} ; \ x_{i-1} \leqslant \alpha_i \leqslant x_i$$

Análogamente, escribamos la suma de Riemann correspondiente a la integral del segundo miembro inicial, considerando la misma partición y los mismos puntos $\xi_i$:

$$\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i) \cdot \varphi'(\xi_i) \cdot \Delta x_i \qquad (2)$$

Restando (1) y (2) queda:

$$\left| \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i) \cdot \Delta x_i \cdot \varphi'(\alpha_i) - \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i) \cdot \varphi'(\xi_i) \cdot \Delta x_i \right| = \left| \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i) [\varphi'(\alpha_i) - \varphi'(\xi_i)] \Delta x_i \right| = H$$

La función $f(x)$ está acotada, luego $|f(x)| < M$, en $[a, b]$. Asimismo como $\varphi'(x)$ es continua en $[a, b]$, será uniformemente continua en $[a, b]$, luego dado un $\varepsilon > 0$, existe un $\delta$ (que depende sólo de $\varepsilon$), tal que se cumplirá:

$$|\varphi'(\alpha_i) - \varphi'(\xi_i)| < \frac{\varepsilon}{M \cdot (b-a)}$$

Luego, se tendrá:

$$H < \left| \sum_{i=1}^{n} M \cdot \frac{\varepsilon}{M(b-a)} \cdot \Delta x_i \right| = \frac{M.\varepsilon.(b-a)}{M.(b-a)} = \varepsilon$$

Luego (1) y (2) tienen el mismo límite, y se tendrá que el de (2) existe, cumpliéndose la igualdad inicial.

4.- Funciones escalonadas como funciones de distribución.-

Sea $\varphi(x)$ una función acotada y definida en $[a,b]$ de tal manera que sea discontinua en un número finito p de puntos $c_k$, siendo:

$$a \leqslant c_1 < c_2 < \dots < c_p \leqslant b$$

Si la función $\varphi(x)$ es constante en cada intervalo abierto $(c_{k-1}, c_k)$, se dice que $\varphi(x)$ es una función escalonada y el número.

$S_k = \varphi(c_k+) - \varphi(c_k-)$, se llama el salto en $c_k$. Si $c_1 = a$, el salto en $c_1$ es $S_1 = \varphi(c_1+) - \varphi(c_1)$, y si $c_p = b$, el salto en $c_p$ es: $S_p = \varphi(c_p) - \varphi(c_p-)$.

Veamos cómo las funciones escalonadas relacionan las integrales de R-S con las sumas finitas, para ello vamos a demostrar el siguiente teorema:

Sea $\varphi(x)$ una función escalonada definida en $[a,b]$, con saltos $S_1, S_2, \dots S_p$ en los puntos $a \leqslant x_1 < x_2 < \dots < x_p \leqslant b$.

Sea la función $f(x)$ definida en $[a,b]$, con la condición de que $f(x)$ y $\varphi(x)$ no sean a la vez discontinuas a la derecha ó a la izquierda de los puntos del salto $x_k$. Vamos a demostrar que la integral según R-S, $\int_a^b f(x).d\varphi(x)$ existe y se cumple:

$$\int_a^b f(x).d\varphi(x) = \sum_{k=1}^{p} f(x_k)S_k$$

Para demostralo, consideremos la función:

$$\Psi(x) = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad x < c_1 \\ S_1 & \text{si} \quad c_1 \leqslant x < c_2 \\ S_1 + S_2 & \text{si} \quad c_2 \leqslant x < c_3 \\ \dots\dots\dots & \\ S_1 + \dots + S_p & \text{si} \quad c_{p-1} \leqslant x < c_p \end{cases}$$

La función $\Phi(x) = \varphi(x) - \Psi(x)$ queda reducida a una constante, por lo que será derivable en $[a,b]$ y se tendrá:

$$\int_a^b f(x).d\varphi(x) = \int_a^b f(x).d\Phi(x) + \int_a^b f(x).d\Psi(x) = \int_a^b f(x).d\Psi(x) = \sum_{k=1}^{p} f(x_k).S_k$$

ya que la última integral se reduce al sumatorio al ser nulas las diferencias $\Psi(x_i) - \Psi(x_{i-1})$ cuando los puntos $x_i$ y $x_{i-1}$ están comprendidos entre dos sucesivos de discontinuidad $c_{i-1}$, $c_i$.

Si $\varphi(x)$ no es función escalonada pero tiene un número $p$ finito de puntos de discontinuidad de primera especie $c_1, c_2, \ldots, c_p$, con saltos $S_1, S_2, \ldots, S_p$ en dichos puntos, podremos demostrar una fórmula análoga. Para ello construimos igual que antes la función $\Psi(x)$.

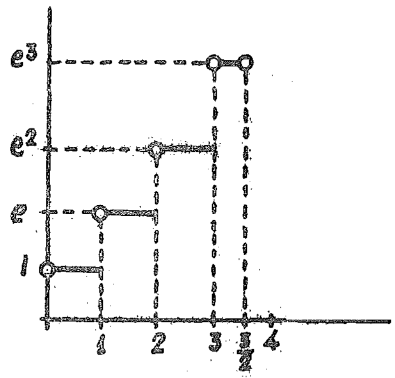
La función $\Phi(x) = \varphi(x) - \Psi(x)$ es también continua. Si además es derivable y con derivada continua en $[a,b]$, tendremos:

$$\int_a^b f(x).d\varphi(x) = \int_a^b f(x).d\Phi(x) + \int_a^b f(x).d\Psi(x) = \int_a^b f(x).\Phi'(x).\ dx + \sum_{k=1}^{p} f(c_k)S_k$$

por los mismos motivos que antes se expusieron anteriormente.

5.- Ejemplos.-

5.1.- Calcular la integral según Riemann-Stieltjes de la función $f(x) = x^2$, respecto de la función de distribución $\varphi(x) = e^{E(x)}$, siendo $E(x)$ la función parte entera de x, en el intervalo $[0, 7/2]$.

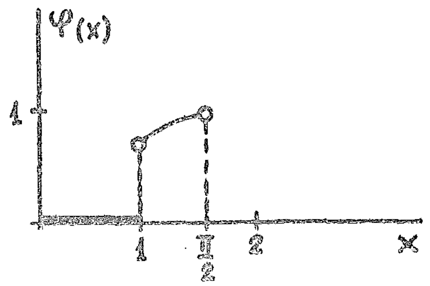



La función $\varphi(x)$ es escalonada, con saltos en los puntos 0, 1, 2 y 3, de valor:

$$S_0 = \varphi(0+) - \varphi(0) = 1-1 = 0$$
$$S_1 = \varphi(1+) - \varphi(1-) = e - 1$$
$$S_2 = \varphi(2+) - \varphi(2-) = e^2 - e$$
$$S_3 = \varphi(3+) - \varphi(3-) = e^3 - e^2$$

$$\int_0^{7/2} x^2 . d[e^{E(x)}] = \sum_{k=0}^{3} f(x_k) . S_k = f(0) . S_0 + f(1) . S_1 + f(2) . S_2 + f(3) . S_3 =$$
$$=(e-1).1 + (e^2-e).4 + (e^3-e^2).9 = 9e^3 - 5e^2 - 3e - 1$$

3.2.- Calcular la integral según Riemann-Stieltjes de la función $f(x) = x$ **respec - to de la función de distribución** $\varphi(x) = E(x).\text{sen}\ x$, **siendo** $E(x)$ **la parte entera de** $x$, en el intervalo $[0, \pi/2]$.




La función $\varphi(x)$ tiene en el punto $x = 1$, un salto de valor $S_1 = \varphi(1+) - \varphi(1-) = \text{sen}\ 1 - 0 = \text{sen}\ 1$.

$$\Phi(x) = \text{sen}\ x - \text{sen}\ 1$$

$$\int_0^{\pi/2} x . d[E(x) . \text{sen}\ x] = \int_0^1 0 + \int_1^{\pi/2} x . d(\text{sen}\ x - \text{sen}\ 1) + f(1) . S_1 =$$
$$= \int_1^{\pi/2} x . \cos x\ dx + \text{sen}\ 1 = [x . \text{sen}\ x]_1^{\pi/2} - \int_1^{\pi/2} \text{sen}\,x\ dx + \text{sen}\ 1 = \frac{\pi}{2} -$$
$$- \text{sen}\ 1 + (0 - \cos 1) + \text{sen}\ 1 = \frac{\pi}{2} - \cos 1$$

# 2

# Integrales dependientes de un parámetro

## LECCION 2

## INTEGRALES DEPENDIENTES DE UN PARAMETRO

### 1.- Integrales dependientes de un parámetro.-

Son numerosos los casos prácticos en los que aparecen integrales con uno o varios parámetros que figuran en la función subintegral e incluso en los límites de integración, y que no pueden expresarse mediante las funciones elementales conocidas. Así se definen numerosas funciones mediante este tipo de integrales, siendo de gran utilidad en muchas aplicaciones. Por ello es necesario estudiarlas y por lo tanto se precisa analizar su continuidad y derivabilidad, como a continuación se expresa.

### 2.- Continuidad.-

Si la función $f(x.y)$ es continua en el rectángulo de variación de $x$ e $y$, $a \leqslant x \leqslant b$, $c \leqslant y \leqslant d$, la $\int_a^b f(x.y)dx$ es una función continua de $y$, en el intervalo $[c,d]$.

Escribamos el incremento de la función $F(y) = \int_a^b f(x.y)dx$

$$\Delta F(y) = F(y+\Delta y) - F(y) = \int_a^b f(x, y+\Delta y)dx - \int_a^b f(x.y)\,dx$$

Por ser $f(x.y)$ continua en un dominio cerrado, será uniformemente continua en él, luego dado un $\varepsilon > 0$, se podrá hallar un valor $\delta$ tal que para cualquier par de puntos $p_1(x_1, y_1)$, $p_2(x_2, y_2)$ que difieran menos de $\delta$, se tendrá: $|f(x_2, y_2) - f(x_1, y_1)| < \varepsilon$. Luego elegidos dos puntos $(x, y)$, $(x, y+\Delta y)$, se tendrá: $|f(x, y+\Delta y) - f(x, y)| < \varepsilon$, siendo $|\Delta y| < \delta$.

Luego quedará:

$$|\Delta F(y)| = \left|\int_a^b f(x.y+\Delta y)dx - \int_a^b f(x.y)dx\right| \leqslant \int_a^b |f(x, y+\Delta y) - f(x.y)|\,dx < \varepsilon \int_a^b dx = \varepsilon.(b-a)$$

luego la función $F(y) = \int_a^b f(x, y)dx$ es continua.

La continuidad permite permutar el signo $\int$ con el paso al límite, por lo que se podrá poner:

$$\lim_{y \to \beta} \int_a^b f(x, y)dx = \int_a^b \lim_{y \to \beta} f(x, y)dx = \int_a^b f(x, \beta)\, dx$$

3.- Derivada de la integral.-

Si la función $f(x, y)$ es derivable respecto de $y$, y tanto la función $f(x, y)$ como la derivada $\partial f / \partial y$ son continuas en el rectángulo $a \leqslant x \leqslant b$, $c \leqslant y \leqslant d$, la integral $F(y) = \int_a^b f(x, y)dx$ admite derivada respecto de $y$ que se obtiene derivando la función subintegral respecto de $y$.

Para ello aplicamos la definición de derivada:

$$F'_y(y) = \frac{\partial F}{\partial y} = \lim_{\Delta y \to 0} \frac{F(y + \Delta y) - F(y)}{\Delta y} \qquad (1)$$

Escribamos aparte el numerador y apliquémosle el teorema del valor medio:

$$F(y+\Delta y) - F(y) = \int_a^b f(x, y+\Delta y)dx - \int_a^b f(x, y)dx = \int_a^b [f(x, y+\Delta y) - f(x, y)]dx =$$

$$= \Delta y . \int_a^b f'_y(x, y + \vartheta . \Delta y).\ dx$$

donde $0 < \vartheta < 1$. Sustituyendo en (1), queda:

$$F'_y = \lim_{\Delta y \to 0} \frac{\Delta y \int_a^b f'_y(x, y + \vartheta . \Delta y).dx}{\Delta y} = \lim_{\Delta y \to 0} \int_a^b f'_y(x, y + \vartheta . \Delta y)\, dx =$$

$$= \int_a^b \lim_{\Delta y \to 0} f'_y(x, y + \vartheta . \Delta y)dx = \int_a^b f'_y(x, y)dx$$

de acuerdo con la continuidad de $f'_y$. Esta fórmula se llama **fórmula de Leibnitz.**

Veamos ahora el caso de que los límites de integración a y b sean función derivables de y. La integral será ahora función de a, b, y, o sea una función compuesta de y.

$$F(a, b, y) = \int_{a(y)}^{b(y)} f(x, y)dx$$

Aplicando la regla de derivación de una función compuesta, se podrá poner:

$$\frac{d}{dy} F(a, b, y) = \frac{d}{dy} \int_{a(y)}^{b(y)} f(x, y)dx = \frac{\partial F}{\partial y} + \frac{\partial F}{\partial a} \cdot \frac{da}{dy} + \frac{\partial F}{\partial b} \cdot \frac{db}{dy} \qquad (2)$$

Para calcular el primer sumando $\partial F/\partial y$, se suponen a y b constantes, luego es el mismo valor calculado antes por la fórmula de Leibnitz, o sea:

$$\frac{\partial F}{\partial y} = \int_a^b f'_y(x, y)dx \qquad (3)$$

Para calcular el tercer sumando, recordemos el teorema fundamental del cálculo integral que expresa la variación de una integral definida al variar el límite superior y que para funciones continuas permite escribir:

$$\frac{d}{dx} F(X) = \frac{d}{dx} \int_a^X f(x)dx = f(X)$$

Aplicándolo a nuestro caso $X = b$, se tendrá:

$$\frac{\partial F}{\partial b} = \frac{\partial}{\partial b} \int_a^b f(x, y)dx = f(b, y) \qquad (4)$$

Para calcular el segundo sumando, podemos aplicar la fórmula (2), cambiando los límites de integración:

$$\frac{\partial F}{\partial a} = \frac{\partial}{\partial a} \int_a^b f(x, y)dx = \frac{\partial}{\partial a} \int_b^a f(x, y)dx = - f(a, y) \qquad (5)$$

Sustituyendo (3), (4) y (5) en (2), queda:

$$\frac{d}{dy} \int_{a(y)}^{b(y)} f(x, y)dx = \int_a^b \frac{\partial f}{\partial y} dx + f(b, y). \frac{db}{dy} - f(a, y) \cdot \frac{da}{dy}$$

4.- <u>Límite uniforme de una suma.</u>-

Si la función $f(x, y)$ es una función continua de x e y en el rectángulo de

**variación** $a \leqslant x \leqslant b$, $c \leqslant y \leqslant d$, la suma $\Sigma f(\xi_i, y).\Delta x_i$ **tiende uniformemente a la integral** $\int_a^b f(x,y)dx$, en el intervalo $[a,b]$, o sea **dado un valor** $\varepsilon > 0$, **se podrá hallar** un $\delta$ tal que para todo sistema de particiones **cuyos intervalos verifiquen** - $\Delta x_i < \delta$ , se tendrá:

$$|\Sigma f(\xi_i, y)\Delta x_i - \int_a^b f(x,y)dx| < \varepsilon \; ; \quad x_i \leqslant \xi_i \leqslant x_i + \Delta x_i$$

**cualquiera** que sea y perteneciente al intervalo $[c,d]$.

Para demostrarlo, sean $M_i$ y $m_i$ el **máximo y el mínimo absoluto de** - - $f(x,y)$ **entre** $f(x_i, y)$ y $f(x_i+\Delta x_i, y)$.

$$s = \Sigma m_i \Delta x_i < \int_a^b f(x,y)dx < \Sigma M_i \Delta x_i = S$$

$$s = \Sigma m_i \Delta x_i < \Sigma f(\xi_i, y)\Delta x_i < \Sigma M_i \Delta x_i = S$$

la diferencia verificará:

$$\left|\int_a^b f(x,y)dx - \Sigma f(\xi_i, y).\Delta x_i\right| < S - s = \Sigma (M_i - m_i)\Delta x_i < \frac{\varepsilon}{b-a} \Sigma \Delta x_i = \varepsilon$$

Ya que $f(x,y)$ es uniformemente continua **en el rectángulo dado, y por** - **tanto** la oscilación $M_i - m_i$ se podrá hacer menor que $\varepsilon/b-a$ **en todo el rectángulo, con independencia** de y, tomando $\Delta x_i < \delta$ .

Esta propiedad se utiliza para el cálculo de **integrales dobles y triples.**

Se puede generalizar para funciones $f(x,y)$ **acotadas y con un número finito de puntos** de discontinuidad.

Asimismo, se puede generalizar para **integrales dependientes de dos parámetros** $\int_a^b f(x,y,z)dx$, exigiendo a $f(x,y,z)$ las **mismas condiciones iniciales de continuidad** en el paralelepípedo $a \leqslant x \leqslant b$, $c \leqslant y \leqslant d$; $e \leqslant z \leqslant f$.

5.- Intervalos infinitos.-

Vamos a generalizar los resultados anteriores **a integrales de intervalo infinito:** $F(y) = \int_a^\infty f(x,y)dx$. Esta integral **impropia tiene un campo de existencia al variar y,** que supondremos es el intervalo $c \leqslant y \leqslant d$.

Se dice que la integral es uniformemente **convergente en dicho intervalo, si dado un número** $\varepsilon > 0$, se puede hallar un valor A que depende de $\varepsilon$ pero no de y tal que $\left|\int_a^\infty f(x,y)\ dx - \int_a^N f(x,y)dx\right| < \varepsilon \ \forall\ N > A\ y\ \forall\ y \in [c,d]$

Vamos a demostrar que si $f(x, y)$ es continua para $x \geqslant a$, $c \leqslant y \leqslant d$, y la integral es uniformemente convergente, la función $F(y) = \int_a^{\infty} f(x, y)dx$ es continua en $[c, d]$.

Para demostrarlo, escribamos el incremento de la función:

$$\Delta F(y) = F(y+\Delta y) - F(y) = \int_a^{\infty} F(x, y+\Delta y)dx - \int_a^{\infty} f(x, y)dx = \int_a^{A} f(x. y+\Delta y)\, dx -$$

$$- \int_a^{A} f(x, y)dx + \int_A^{\infty} f(x, y+\Delta y)dx - \int_A^{\infty} f(x, y)dx$$

El valor absoluto se podrá acotar así:

$$|\Delta F(y)| = |F(y+\Delta y) - F(y)| \leqslant \left| \int_a^{A} [f(x, y+\Delta y) - f(x, y)]\, dx \right| +$$

$$+ \left| \int_A^{\infty} f(x, y+\Delta y)dx \right| + \left| \int_A^{\infty} f(x, y)dx \right| \qquad (1)$$

Por la convergencia uniforme de la integral, se puede encontrar un A tal que los dos últimos sumandos sean menores que $\varepsilon$. Fijado un valor A, el primer sumando se puede acotar así:

$$\int_a^{A} |f(x, y+\Delta y) - f(x, y)|\, dx < \int_a^{A} \varepsilon \, .dx = \varepsilon(A-a)$$

Sustituyendo en (1), queda:

$$|\Delta F(y)| < \varepsilon\, (A-a) + 2\varepsilon$$

Por lo que se puede hacer tan pequeño como se quiera, luego la función $F(y)$ es continua para cualquier valor de y perteneciente al intervalo $[c, d]$, y por lo tanto se cumple la permutabilidad del signo $\int$ con el paso al límite en y.

La fórmula de Leibnitz para la derivación bajo el signo integral es por lo tanto válida, si es uniformemente convergente la integral de la derivada -- $\int_a^{\infty} f'_y . dx.$

6.- Ejemplos.-

6.1.- Calcular:

$$I = \int_0^\infty \frac{e^{-x} . \operatorname{sen} ax}{x} dx$$

Para resolverla, derivamos respecto del parámetro a:

$$\frac{dI}{da} = \int_0^\infty e^{-x} . \cos ax . dx = \frac{1}{1+a^2}$$

Integrando queda:

$$I(a) = \int \frac{da}{1+a^2} = \operatorname{arctg} a + C$$

Es necesario determinar C unívocamente ya que I es una integral definida.. Para ello damos al parámetro a algún valor sencillo, por ejemplo a = 0, y queda:

$$I(0) = \operatorname{arctg} 0 + C = \int_0^\infty e^{-x} \frac{0 . dx}{x} = 0 \Longrightarrow C = 0$$

luego: $I = \operatorname{arctg} a$.

---

6.2.- Calcular:

$$I(a) = \int_0^\infty L(1+\frac{a^2}{x^2}) . Lx . dx$$

$$I'(a) = \int_0^\infty \frac{2a/x^2}{1+\frac{a^2}{x^2}} Lx . dx = \int_0^\infty \frac{2a}{a^2+x^2} Lx . dx$$

hacemos el cambio $x = a . tg\ t$; $dx = a(1+tg^2 t)dt$

$$I'(a) = \int_0^{\pi/2} \frac{2a}{a^2+a^2 tg^2 t} . L(a . tg\ t) . a(1+tg^2 t) . dt = 2\int_0^{\pi/2} L(a . tg\ t) . dt =$$

$$= 2\int_0^{\pi/2} La . dt + 2\int_0^{\pi/2} L\ tg\ t . dt = 2 . La . \frac{\pi}{2} + 2\int_0^{\pi/2} L\operatorname{sen} t\ dt - 2\int_0^{\pi/2} L\cos t\ dt =$$

haciendo en la última integral el cambio: $t = \frac{\pi}{2} - z$ .

$$I'(a) = \pi . La + 2 \int_0^{\pi/2} L \operatorname{sen} t dt + 2 \int_{\pi/2}^0 L\cos(\frac{\pi}{2} - z) dz = \pi La$$

Luego quedará, integrando respecto de a:

$$I(a) = \int \pi La \cdot da = \pi [a . La - \int a . \frac{1}{a} \cdot da] = \pi a (La - 1) + k \qquad (1)$$

para determinar la constante k, hacemos a = 0 y sustituimos en el enunciado y en (1), obteniendo:

$$I(0) = \int_0^{\infty} L1 . Lx \cdot dx = 0 = \lim_{a \to 0} [\pi a(La - 1) + k] = 0 + k = k$$

luego k = 0, sustituyendo en (1) queda definitivamente:

$$\underline{I(a) = \pi a(La - 1)}$$

6.3.- Calcular:

$$I = \int_0^{\pi/2} \frac{\cos^2 x \ . \ dx}{(a^2 - b^2 \operatorname{sen}^2 x)^2}, \text{ siendo } a > b$$

Partimos de la integral:

$$I(a, b) = \int_0^{\pi/2} \frac{dx}{a^2 - b^2 \operatorname{sen}^2 x}$$

hagamos en ésta el cambio tg x = t; sen x = $t / \sqrt{1+t^2}$ ; dx = $dt/1 + t^2$.

$$I(a, b) = \int_0^{\infty} \frac{dt/1 + t^2}{a^2 - b^2 \frac{t^2}{1+t^2}} = \int_0^{\infty} \frac{dt}{(a^2 - b^2)t^2 + a^2} = \frac{\pi}{2a \sqrt{a^2 - b^2}}$$

Derivando respecto de b::

$$I'_b(a, b) = \int_0^{\pi/2} \frac{2b . \operatorname{sen}^2 x}{(a^2 - b^2 \operatorname{sen}^2 x)^2} = \frac{\pi}{2a} . \frac{1}{\sqrt{(a^2 - b^2)^3}} . b$$

luego:

$$\int_0^{\pi/2} \frac{\operatorname{sen}^2 x}{(a^2-b^2\operatorname{sen}^2 x)^2} = \frac{\pi}{4a} \cdot \frac{1}{\sqrt{(a^2-b^2)^3}} \qquad (1)$$

Por otro lado derivamos I(a, b) respecto de a y se obtiene:

$$I'_a(a,b) = -\int_0^{\pi/2} \frac{2a\ dx}{(a^2-b^2\operatorname{sen}^2 x)^2} = \frac{\pi}{2} \frac{-\sqrt{a^2-b^2} - a.\dfrac{a}{\sqrt{a^2-b^2}}}{a^2(a^2-b^2)}$$

luego:

$$\int_0^{\pi/2} \frac{dx}{(a^2-b^2\operatorname{sen}^2 x)^2} = \frac{\pi(2a^2-b^2)}{4a^3(a^2-b^2)^{3/2}} \qquad (2)$$

sustituyendo (1) y (2) en I quedará:

$$I = \int_0^{\pi/2} \frac{\cos^2 x\ dx}{(a^2-b^2\operatorname{sen}^2 x)^2} = \int_0^{\pi/2} \frac{1-\operatorname{sen}^2 x}{(a^2-b^2\operatorname{sen}^2 x)^2}\,dx =$$

$$= \frac{\pi\ (2a^2-b^2)}{4a^3(a^2-b^2)^{3/2}} - \frac{\pi\ a^2}{4a^3(a^2-b^2)^{3/2}} = \frac{\pi}{4a^3\ \sqrt{a^2-b^2}}$$

6.4.- Calcular:

$$I(a) = \int_0^{\pi/4a} \frac{x^2.\operatorname{sen} ax}{\cos^3 ax}\,dx, \text{ partiendo de la integral } \int_0^{\pi/4a} tg(at)dt = \frac{1}{2a}.L2$$

y utilizando las fórmulas de derivación bajo el signo integral.

$$\int_0^{\pi/4a} tg\ ax = \frac{L2}{2a}, \text{ derivando respecto de } a.$$

$$\int_0^{\pi/4a} \frac{x}{\cos^2 ax}\,dx - \frac{\pi}{4a^2} \cdot tg(a\ .\ \frac{\pi}{4a}) = -\frac{2L2}{4a^2}$$

$$\int_0^{\pi/4a} \frac{x}{\cos^2 ax}\,dx = \frac{\pi-2L2}{4\ a^2}, \text{ derivando otra vez queda:}$$

$$2\int_0^{\pi/4a} \frac{x^2 \operatorname{sen} ax}{\cos^3 ax}\,dx - \frac{\pi}{4a^2}\,\frac{\pi/4a}{\cos^2(a\,\frac{\pi}{4a})} = \frac{2L2-\pi}{2a^3}$$

de donde operando se obtiene:

$$\int_0^{\pi/4a} \frac{x^2 \operatorname{sen} ax}{\cos^3 ax}\,dx = \frac{\pi^2+4(2L2-\pi)}{16\,a^3}$$

# 3

# Funciones definidas por medio de integrales

## LECCION 3

## FUNCIONES DEFINIDAS POR MEDIO DE INTEGRALES

### 1.- Conceptos generales.-

El concepto de integral definida ofrece la posibilidad de definir nuevas funciones trascendentes; caso particular lo ofrecen las funciones $f(x)$ cuya primitiva no pueda expresarse mediante las funciones elementales. Podemos estudiar la variación de dicha integral, definiendo una función cuya variable independiente sea el límite superior de dicha integral y dando al límite inferior un valor constante (ó al r vés):

$$F(x) = \int_a^x f(t) . dt$$

Otra forma de definir funciones trascendentes lo constituyen las integrales paramétricas, considerando los parámetros como las variables independientes de dichas funciones, pudiendo los límites ser constantes ó bien funciones de los parámetros:

$$F(x) = \int_{a(x)}^{b(x)} f(t, x) dt$$

Las funciones así definidas, más corrientes en la práctica se encuentran tabuladas en numerosos formularios y libros.

Se debe recomendar el libro "Tables of Functions" de Jahnke y Emde, en donde se encuentran muchas funciones importantes tabuladas, así como las representaciones gráficas de las mismas.

A continuación vamos a desarrollar algunas de las funciones así definidas más importantes en Telecomunicación.

### 2.- Función factorial $\Gamma(p)$.-

Esta función se llama también función euleriana de segunda especie ó función factorial y se define por la fórmula de Gauss.

$$\Gamma(p) = \lim_{n \to \infty} \frac{n! \quad n^p}{p(p+1)\ (p+2)\ \ldots\ (p+n)} \tag{1}$$

Esta función se hace infinita para los valores de p enteros y negativos (incluyendo p = 0).

Cuando p >0, se puede definir la función factorial por la siguiente integral definida:

$$\Gamma(p) = \int_0^{\infty} x^{p-1} . e^{-x} . dx \qquad (2)$$

Para demostrarlo, calculemos previamente la integral:

$$I = \int_0^n (1 - \frac{t}{n})^n . t^{p-1} . dt$$

efectuamos el cambio de variable: $\frac{t}{n} = z$; $dt = n.dz$.

$$I = n^p \int_0^1 (1-z)^n . z^{p-1} . dz$$

integrando por partes queda (siendo $n > 0$ y $z > 0$):

$$I = n^p \left[ \left| \frac{(1-z)^n z^p}{p} \right|_0^1 + \frac{n}{p} \int_0^1 (1-z)^{n-1} . z^p . dz \right] =$$

$$I = n^p . \frac{n}{p} \int_0^1 (1-z)^{n-1} . z^p . dz \text{ del mismo modo:}$$

$$\int_0^1 (1-z)^{n-1} . z^p . dz = \frac{n-1}{p+1} \int_0^1 z^{p+1} : (1-z)^{n-2} dz$$

$$\int_0^1 z^{p+1} (1-z)^{n-2} . dz = \frac{n-2}{p+2} \int_0^1 z^{p+2} . (1-z)^{n-3} . dz$$

..............................................

$$\int_0^1 z^{n+p-2} (1-z) dz = \frac{1}{n+p-1} \int_0^1 z^{n+p-1} . dz = \frac{1}{(n+p-1)(n+p)}$$

Multiplicando miembro a miembro las igualdades anteriores y simplificando do, queda:

$$I = n^p \frac{n(n-1)(n-2)\ldots 1}{p\cdot(p+1)(p+2)\ \ldots\ (p+n-1)(p+n)} = \frac{n^p\ .\ n!}{p\cdot(p+1)(p+2)\ldots(p+n-1)(p+n)}$$

Tomando límites para $n \to \infty$ queda:

$$\lim_{n\to\infty} I = \lim_{n\to\infty} \frac{n^p\ .\ n!}{p(p+1)(p+2)\ldots(p+n)} = \int_0^\infty e^{-t}\ .\ t^{p-1}\ .\ dt$$

o sea:

$$\Gamma(p) = \int_0^\infty x^{p-1}\ .\ e^{-x}\ .\ dx, \text{ cuando } p > 0$$

A esta última integral se le llama integral euleriana de segunda especie.

Otra definición de la función $\Gamma(p)$ que damos sin demostrar es la siguiente (debida a Weierstrass):

$$\frac{1}{\Gamma(p)} = p\ .\ e^{\gamma p}\ .\ \prod_{n=1}^{\infty} [(1+\frac{p}{n})\ .\ e^{-\frac{p}{n}}]$$

siendo $\gamma$ la constante de Euler de valor aproximado $\gamma = 0,577215\ldots$

Otras definiciones son las siguientes:

$$\Gamma(p) = \int_0^1 (L\ \frac{1}{x})^{p-1}\ .\ dx \text{ (mediante el cambio } y = e^{-x})$$

$$\Gamma(\frac{1}{p}) = p \int_0^\infty e^{-x^p}\ .\ dx$$

2.1.- Convergencia de la integral euleriana de segunda especie.-

Vamos a estudiar la convergencia de la integral:

$$I = \int_0^\infty x^{p-1}\ .\ e^{-x}\ .\ dx$$

La función subintegral se hace infinita en el origen si $p < 1$; por ello, hay que estudiar su convergencia no sólo en el infinito sino también en el origen. Para ello la descomponemos en dos integrales en los intervalos $[0,1]$ y $[1,\infty]$

$$\int_0^\infty x^{p-1}\ .\ e^{-x}\ .\ dx = \int_0^1 x^{p-1}\ .\ e^{-x}\ .\ dx + \int_1^\infty x^{p-1}\ .\ e^{-x}\ .\ dx =$$

$$= \int_0^1 \frac{e^{-x} \cdot dx}{x^{1-p}} + \int_1^{\infty} \frac{e^{-x} \cdot x^{n+p-1}}{x^n} dx$$

En la primera integral, la función $e^{-x}$ está acotada en $[0,1]$, $1 \geqslant e^{-x} \geqslant e^{-1}$, luego es convergente si $1-p < 1$, ó sea $p > 0$, y es divergente si $1-p \geqslant 1$, ó sea $p \leqslant 0$.

En la segunda integral, habiendo multiplicado y dividido por $x^n$, cualquiera que sea $n > 1$, la función $e^{-x} \cdot x^{n+p-1}$ está acotada en $[1, \infty]$ $\forall$ p

Queda pues que la integral I es convergente sólo cuando $p > 0$, y es divergente si $p \leqslant 0$. Recuérdese que la igualdad:

$$\Gamma(p) = \int_0^{\infty} x^{p-1} \cdot e^{-x} \cdot dx$$

sólo se definió cuando era $p > 0$.

2.2.- Cálculo recurrente de $\Gamma(p)$.-

Integrando por partes queda:

$$\Gamma(p) = \int_0^{\infty} x^{p-1} \cdot e^{-x} \cdot dx = \left[ -x^{p-1} \cdot e^{-x} \right]_0^{\infty} + (p-1) \int_0^{\infty} x^{p-2} \cdot e^{-x} \cdot dx$$

Cuando $p > 1$, el primer sumando se anula y se obtiene:

$$\Gamma(p) = (p-1) \cdot \Gamma(p-1)$$

Del mismo modo podemos demostrar la fórmula anterior partiendo de la definición de Gauss:

$$\Gamma(p+1) = \lim_{n \to \infty} \frac{n^{p+1} \cdot n!}{(p+1)(p+2)\dots(p+n+1)}$$

$$\Gamma(p) = \lim_{n \to \infty} \frac{n^p \cdot n!}{p \cdot (p+1)\dots(p+n)}$$

luego:

$$\Gamma(p+1) = \Gamma(p) \cdot \lim_{n \to \infty} \frac{np}{p+n+1} = p \cdot \Gamma(p) \qquad (1)$$

Aplicando reiteradamente la fórmula (1), suponiendo que p es un número entero, se obtiene:

$$\Gamma(p) = (p-1)(p-2)\ldots 2.1.\Gamma(1)$$

Como $\Gamma(1) = \int_0^{\infty} e^{-x}.dx = 1$, queda:

$$\Gamma(p) = (p-1)!$$

Por esta fórmula se denomina a la función $\Gamma$ también "función factorial".

Si $p$ no es entero, por ejemplo $p = n + r$ (siendo $n$ entero y $0 < r < 1$) quedará:

$$\Gamma(p) = \Gamma(n+r) = (p-1).(p-2)\ldots(p-n).\Gamma(r)$$

Para calcular la función $\Gamma$ bastará pues tenerla tabulada entre 0 y 1, aun que por ser $\Gamma(0) = \infty$, se prefiere construir las tablas entre 1 y 2, y utilizar la fórmula:

$$\Gamma(p) = (p-1).(p-2)\ldots(2+r)(1+r).\,\Gamma(1+r)$$

Otra relación útil que reduce la extensión de las tablas a la mitad es la siguiente:

$$\Gamma(p)\,.\,\Gamma(1-p) = \frac{\pi}{\operatorname{sen} p\pi}$$

3.- Función Beta.-

Se designa como $\beta(p.q)$ (beta de p y q), o integral euleriana de primera especie a la siguiente integral binomia:

$$\beta(p.q) = \int_0^1 x^{p-1}.(1-x)^{q-1}.dx$$

Vamos a estudiar la convergencia de esta integral, para ello descompone mos la integral de la siguiente forma:

$$\int_0^1 x^{p-1}.(1-x)^{q-1}dx = \int_0^{1/2} x^{p-1}(1-x)^{q-1}dx + \int_{1/2}^1 x^{p-1}\,(1-x)^{q-1}\,dx =$$

$$= \int_0^{1/2} \frac{(1-x)^{q-1}}{x^{1-p}}\,dx + \int_{1/2}^1 \frac{x^{p-1}}{(1-x)^{1-q}}\,dx$$

En la primera integral, la función del numerador está acotada superior e inferiormente en el intervalo $[0,\ 1/2]$ luego:

si $1 - p \geqslant 1$ ; $p \leqslant 0$ divergente

si $1 - p < 1$ ; $p > 0$ convergente

En la segunda integral, la función del numerador $x^{p-1}$ está acotada superior e inferiormente en el intervalo $[1/2,\ 1]$, luego:

si $1 - q \geqslant 1$ ; $q \leqslant 0$ divergente

si $1 - q < 1$ ; $q > 0$ convergente

Luego la $\beta(p.q)$ es convergente si $p > 0$ y $q > 0$ y divergente en cualquier otro caso.

3.1.- Propiedades de la función $\beta(p.q)$.-

a) Simetría.-

Efectuamos el cambio de variable $x = 1-y$ y queda:

$$\beta(p.q) = \int_0^1 y^{q-1}.(1-y)^{p-1}\, dy = \beta(q.p)$$

b) Reducción.-

Integrando $\beta(p,q)$ por partes se obtiene:

$$\beta(p,q) = \left[\frac{(1-x)^{q-1}.x^p}{p}\right]_0^1 + \frac{q-1}{p} . \int_0^1 x^p.(1-x)^{q-2}dx = \frac{q-1}{p}\ \beta(p+1,\ q-1)$$

Si $q$ es entero, aplicando reiteradamente la fórmula anterior, se obtiene:

$$\beta(p,q) = \frac{(q-1).(q-2)...2.1}{p(p+1)...(p+q-3)(p+q-2)} . \beta(p+q-1,\ 1)$$

pero $\beta(p.1) = \int_0^1 x^{p-1}dx = 1/p.$

luego:

$$\beta(p+q-1, 1) = \frac{1}{p+q-1}$$

quedando definitivamente:

$$\beta(p,q) = \frac{(q-1)(q-2)...\ 2.1}{p(p+1)...(p+q-2)(p+q-1)}$$

De modo análogo, si p hubiese sido entero, habríamos obtenido:

$$\beta(p,q) = \frac{(p-1)(p-2)\ldots\ 2.\ 1}{q(q+1)\ldots(q+p-2)(q+p-1)}$$

c) Relación con la función $\Gamma$.

Si q es entero, se ha demostrado la fórmula:

$$\beta(p,q) = \frac{(q-1)(q-2)\ldots\ 2.1}{p(p+1)\ \ldots\ (p+q-1)}$$

si p también es entero, multiplicando y dividiendo por $\Gamma(p)$ queda:

$$\beta(p,q) = \frac{(q-1)!\ \ \Gamma(p)}{p(p+1)\ldots(p+q-1).1.2\ldots(p-1)} = \frac{\Gamma(p)\ .\ \Gamma(q)}{\Gamma(p+q)}$$

Esta fórmula relaciona la función $\beta$ con la función $\Gamma$ y aunque se ha demostrado sólo para valores enteros de p y q, se podrá demostrar más adelante su validez para cualquier valor de p y q positivo.

d) Otra expresión de la función $\beta$.

Si en la definición efectuamos el cambio de variable $x = \operatorname{sen}^2\theta$, $dx = 2\operatorname{sen}\theta\cos\theta\,d\theta$, se obtiene:

$$\beta(p,q) = 2\int_0^{\pi/2} \operatorname{sen}^{2p-1}\theta\ .\cos^{2q-1}\theta\ .\ d\theta$$

Esta expresión permite calcular la integral siguiente, para cualquier valor de p y q positivo:

$$\int_0^{\pi/2} \operatorname{sen}^{2p-1}\theta\ .\cos^{2q-1}\theta\ .\ d\theta = \frac{1}{2}\ .\beta(p,q)$$

Haciendo $p = q = \frac{1}{2}$, se obtiene:

$$\beta\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right) = 2\int_0^{\pi/2} d\theta = \pi$$

Por la relación con la función $\Gamma$ podemos escribir:

$$\beta\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right) = \frac{\Gamma(\frac{1}{2})\,\Gamma(\frac{1}{2})}{\Gamma(1)} = [\Gamma(\frac{1}{2})]^2 = \pi \text{ y resulta } \Gamma(\frac{1}{2}) = \sqrt{\pi}$$

Si hacemos en la integral euleriana de segunda especie el cambio $x = y^2$, $dx = 2y\,dy$, quedaría:

$$\Gamma(p) = 2\int_0^\infty y^{2p-1}.e^{-y^2}.dy$$

en particular:

$$\Gamma(\tfrac{1}{2}) = 2\int_0^\infty e^{-y^2}.\,dy = \sqrt{\pi}$$

De aquí podríamos obtener el valor de la integral de las probabilidades

$$\int_0^\infty e^{-y^2}.\,dy = \frac{1}{2}\sqrt{\pi}$$

4.- Integrales de Fresnel.-

Se llaman así a las siguientes integrales:

$$A = \int_0^\infty \cos x^2\,dx, \qquad B = \int_0^\infty \operatorname{sen} x^2\,dx$$

Para calcularlas procedemos de la siguiente forma:

$$A-Bj = \int_0^\infty (\cos x^2 - j\operatorname{sen} x^2)dx = \int_0^\infty e^{-jx^2}.dx$$

efectuamos el cambio $\sqrt{j}\,x = t$; $dx = \frac{1}{\sqrt{j}}\,dt = \frac{1}{\sqrt{2}}(1-j)dt$

$$A-Bj = \int_0^\infty e^{-t^2}.\frac{1}{\sqrt{2}}.(1-j)dt = \frac{1-j}{\sqrt{2}}.\int_0^\infty e^{-t^2}dt = \frac{1-j}{\sqrt{2}}.\frac{1}{2}\sqrt{\pi}$$

de donde queda $A = B = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{2}}$.

Sin embargo la validez de las transformaciones efectuadas requiere el estudio de la integral en el campo complejo.

Vamos a calcularlas por otro procedimiento que requiere el conocimiento de las integrales dobles por lo que no se debe estudiar hasta no conocer el concepto de integral doble.

Vamos previamente a demostrar la siguiente fórmula:

$$\int_0^{\infty} \frac{\cos x}{x^p}\,dx = \frac{\pi}{2\,\Gamma(p)\cos\frac{p\pi}{2}}\,, \quad 0 < p < 1 \qquad (1)$$

Partimos de la función $\Gamma$ efectuando el cambio de variable $y = ux$.

$$\Gamma(p) = \int_0^{\infty} y^{p-1}.e^{-y}dy = x^p \,.\int_0^{\infty} u^{p-1}\,.\,e^{-ux}\,.\,du$$

$$\frac{1}{x^p} = \frac{1}{\Gamma(p)}\int_0^{\infty} u^{p-1}.e^{-xu}\,.\,du$$

multiplicamos los dos miembros por $\cos x.\,dx$, e integramos en $[0,\infty]$.

$$\int_0^{\infty}\frac{\cos x}{x^p}\,dx = \frac{1}{\Gamma(p)}\int_0^{\infty}\left[\int_0^{\infty} u^{p-1}.e^{-ux}.du\right]\cos x.dx$$

cambiando el orden de integración queda:

$$\int_0^{\infty}\frac{\cos x}{x^p}\,dx = \frac{1}{\Gamma(p)}\int_0^{\infty} u^{p-1}.du\int_0^{\infty} e^{-ux}\cos x\,dx = \frac{1}{\Gamma(p)}\,.\int_0^{\infty}\frac{u^p}{1+u^2}\,du$$

Efectuamos el cambio de variable $1 + u^2 = \frac{u^2}{t}$

$u^2 = \frac{t}{1-t}$ ; $u = \frac{t^{1/2}}{(1-t)^{1/2}}$ y la integral se transforma en:

$$\int_0^{\infty}\frac{\cos x}{x^p}\,dx = \frac{1}{\Gamma(p)}\int_0^1 t^{\frac{p}{2}-\frac{1}{2}}.(1-t)^{-\frac{p}{2}-\frac{1}{2}}\,dt = \frac{1}{2}\,.\,\beta\left(\frac{p}{2}+\frac{1}{2},\,\frac{1}{2}-\frac{p}{2}\right) =$$

$$= \frac{1}{2}\,.\,\frac{\Gamma(\frac{p}{2}+\frac{1}{2})\Gamma(\frac{1}{2}-\frac{p}{2})}{\Gamma(1)} = \frac{1}{2}\,\frac{\pi}{\operatorname{sen}(\frac{1}{2}-\frac{p}{2})\pi} = \frac{\pi}{2\cos\frac{p\pi}{2}}$$

En la primera integral de Fresnel efectuamos el cambio $x^2 = y$, y aplicamos la fórmula demostrada (1).

$$A = \int_0^{\infty}\cos x^2 dx = \frac{1}{2}\int_0^{\infty}\frac{\cos y}{\sqrt{y}}\,dy = \frac{1}{2}\left[\frac{\pi}{2\Gamma(\frac{1}{2}).\cos\frac{\pi}{4}}\right] = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{2}}$$

Del mismo modo calcularíamos B .

5.- Otras funciones definidas por integrales.-

Ejemplos notables de funciones muy importantes son los siguientes:

a) Función seno integral.

$$S_i(x) = \int_0^x \frac{\text{sen } t}{t} dt$$

Su valor en $x = \infty$ es: $S_i(\infty) = \int_0^\infty \frac{\text{sen } t}{t} dt = \frac{\pi}{2}$ .

A veces se define la función seno integral por la siguiente fórmula, ligeramente distinta de la anterior:

$$s_i(x) = - \int_x^\infty \frac{\text{sen } t}{t} dt$$

Estas dos definiciones se pueden relacionar así:

$$S_i(x) - s_i(x) = \int_0^x \frac{\text{sen } t}{t} dt + \int_x^\infty \frac{\text{sen } t}{t} dt = \int_0^\infty \frac{\text{sen } t}{t} dt = \frac{\pi}{2}$$

b) Función coseno integral.

$$C_i(x) = - \int_x^\infty \frac{\cos t}{t} dt$$

Esta definición sólo es válida para $x > 0$.

c) Función de error.

$$\vartheta(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \cdot \int_0^x e^{-t^2} . dt$$

Esta función aparece muy frecuentemente en estadística y cálculo de probabilidades, así como en el cálculo de la propagación de perturbaciones a lo largo de las líneas eléctricas de transmisión. En muchos textos se representa por la notación erf(x).

d) Función $\Pi(x)$.

$$\Pi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot \int_{-\infty}^{x} e^{-\frac{t^2}{2}} \cdot dt$$

representa el área comprendida entre la función de Gauss $\varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\frac{x^2}{2}}$ y el eje de abscisas, situada a la izquierda de la abscisa x. Se relaciona con la función error por la fórmula:

$$\vartheta\left(\frac{x}{\sqrt{2}}\right) + 1 = 2 \cdot \Pi(x)$$

Existen tablas muy completas de la función $\Pi(x)$ que permiten a través de la última fórmula calcular $\vartheta(x)$.

La función de Gauss $\varphi(x)$ tiene la propiedad de ser su propia transformada de Fourier (definición que se verá más adelante), por lo que resulta de gran importancia en el estudio del espectro de las señales y de los diagramas direccionales de las antenas radioeléctricas.

e) Función complementaria de error.

$$f(x) = 1 - \vartheta(x)$$

$$f(x) = 1 - \frac{2}{\sqrt{\pi}} \cdot \int_0^x e^{-t^2} . dt = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \cdot \int_0^{\infty} e^{-t^2} dt - \frac{2}{\sqrt{\pi}} \cdot \int_0^x e^{-t^2} dt = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^x e^{-t^2} . dt$$

En muchos libros se representa por erfc(x).

f) Función logaritmo integral.

$$L_i(x) = \int_0^x \frac{dt}{Lt}$$

g) Función exponencial integral.

$$E_i(x) = \int_{-\infty}^{x} \frac{e^t}{t} \cdot dt$$

Se relaciona con la anterior por la expresión:

$$E_i(x) = L_i(e^x)$$

h) Funciones elípticas.

Surgen del estudio de las integrales elípticas que como se recordará son de la forma $\int R(x, \sqrt{p(x)})dx$, siendo R una función racional y p(x) un polinomio de tercero o cuarto grado; por reducción estas integrales se transformaban entre otros en los siguientes tipos:

$$\int \frac{dx}{\sqrt{1-k^2 \operatorname{sen} x}} \quad \text{integral de 1ª especie de Legendre}$$

$$\int \sqrt{1-k^2 \operatorname{sen}^2 x}\,.dx \quad \text{integral de 2ª especie de Legendre}$$

A partir de ellas podemos definir las funciones elípticas:

$$F(k,x) = \int_0^x \frac{dt}{\sqrt{1-k^2 \operatorname{sen}^2 t}}$$

$$E(k,x) = \int_0^x \sqrt{1-k^2 \operatorname{sen}^2 t}\,dt$$

siendo:

$$-1 < k < 1$$

i) Funciones de Fresnel.

En problemas de propagación de ondas aparecen las funciones de Fresnel, que se definen así:

$$C(x) = \int_0^x \cos \frac{\pi u^2}{2}\,.du = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{x\sqrt{\frac{\pi}{2}}} \cos t^2 .dt$$

$$S(x) = \int_0^x \operatorname{sen} \frac{\pi u^2}{2}\,.du = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{x\sqrt{\frac{\pi}{2}}} \operatorname{sen} t^2\, dt$$

Su valor para $x = \infty$ , dee acuercon el punto 4 $\qquad C(\infty) = S(\infty) = \frac{1}{2}$

En general, la importancia de todas estas funciones reside en que frecuentemente se pueden expresar soluciones de problemas físicos con términos de ellas.

6.- Ejemplos.-

6.1.- Calcular la integral $\displaystyle\int_0^\infty \sqrt{x}\,.\,e^{-x^3}\,.\,dx$

Hacemos el cambio $x^3 = y$; $x = y^{\frac{1}{3}}$; $dx = \frac{1}{3}\,y^{-\frac{2}{3}}\,.dy$

$$I = \int_0^\infty \sqrt{y^{1/3}}\,.\,e^{-y}.\,\frac{1}{3}\,.\,y^{-2/3}.dy = \frac{1}{3}\int_0^\infty y^{-1/2}.\,e^{-y}dy = \frac{1}{3}\Gamma(\frac{1}{2}) = \frac{\sqrt{\pi}}{3}$$

6.2.- Calcular: $\displaystyle\int_0^\infty 3^{-4x^2}\,dx.$

$$I = \int_0^\infty (e^{L3})^{-4x^2}.dx = \int_0^\infty e^{(-4L3)x^2}.dx,$$ hacemos el cambio $(4L3)x^2 = z$.

$$I = \int_0^\infty e^{-z}.d(\frac{z^{1/2}}{\sqrt{4L3}}) = \frac{1}{2\sqrt{4L3}}\int_0^\infty z^{-1/2}.\,e^{-z}dz = \frac{\Gamma(1/2)}{2\sqrt{4L3}} = \frac{\sqrt{\pi}}{4\sqrt{L3}}$$

6.3.- Calcular:

$$\int_0^a x^4\sqrt{a^2 - x^2}\,dx$$

Hacemos $x^2 = a^2 y$ y queda:

$$I = a^6\int_0^1 y^{3/2}(1-y)^{1/2}dy = a^6.\,\beta(\frac{5}{2},\frac{3}{2}) = a^6\,\frac{\Gamma(5/2).\Gamma(3/2)}{\Gamma(4)} = \frac{\pi a^6}{16}$$

6.4.- Calcular:

$$I = \int_0^{\pi/2}\frac{d}{\sqrt{1-\frac{1}{2}\,\mathrm{sen}^2\varphi}}$$

Partimos de:

$$I_1 = \int_0^{\pi/2}\frac{dt}{\sqrt{\cos t}} = \int_0^{\pi/2}\cos^{-\frac{1}{2}}t.dt = \frac{1}{2}.\beta(\frac{1}{4}\;\frac{1}{2}) = \frac{\Gamma(\frac{1}{4})\sqrt{\pi}}{2.\Gamma(\frac{3}{4})} = \frac{[\Gamma(\frac{1}{4})]^2}{2.\sqrt{2\pi}}$$

por otro lado hacemos el cambio $\sqrt{2}.\,\mathrm{sen}\,\frac{t}{2} = \mathrm{sen}\,\varphi$ .

$$I_1 = \int_0^{\pi/2} \frac{dt}{\sqrt{\cos t}} = \int_0^{\pi/2} \frac{dt}{\sqrt{\cos^2 \frac{t}{2} - \operatorname{sen}^2 \frac{t}{2}}} = \int_0^{\pi/2} \frac{dt}{\sqrt{1-2 \operatorname{sen}^2 \frac{t}{2}}} =$$

$$= \sqrt{2} \int_0^{\pi/2} \frac{d\varphi}{\sqrt{1-\frac{1}{2}\operatorname{sen}^2 \varphi}} = \sqrt{2} \cdot I, \quad \text{Luego:}$$

$$I = \frac{I_1}{\sqrt{2}} = \frac{[\Gamma(\frac{1}{4})]^2}{4.\sqrt{\pi}}$$

# 4

# Integral Curvilínea

# LECCION 4

# INTEGRAL CURVILINEA

## 1.- Concepto de integral curvilínea.-

Vamos a definir un nuevo concepto de gran interés para el desarrollo de la teoría vectorial de campos y que es el de integral curvilínea.

Por comodidad del razonamiento vamos a exponer dicho concepto para el caso de una función de tres variables aunque podremos extender el mismo posteriormente al espacio n-dimensional.

Así pues, consideremos tres funciones continuas y con derivada continua en el intervalo $[a, b]$ de variación de la variable independiente t.

$$x = x(t) \ ; \ y = y(t) \ ; \ z = z(t) \qquad (1)$$

Estas tres funciones representan las ecuaciones paramétricas de un arco de curva C, con tangente, que varía de manera continua en cada uno de sus puntos.

Consideremos también una función $f(x, y, z)$ (2) continua en todos los puntos del arco C, lo que quiere decir que al sustituir $\underline{x}$, $\underline{y}$, $\underline{z}$ por sus expresiones (1) resulta una función continua de $\underline{t}$ en el intervalo $[a, b]$.

Si dividimos el intervalo $[a, b]$ en $\underline{n}$ partes mediante los puntos:

$$a = t_0, \ t_1, \ t_2, \ \ldots, t_i, \ t_{i+1}, \ \ldots, \ t_n = b \qquad (3)$$

se obtiene una descomposición del arco de curva C en $\underline{n}$ arcos determinados por los puntos.

$$P_0 = A, \ P_1, \ P_2, \ \ldots, \ P_i, \ P_{i+1}, \ldots, P_n = B$$

Formemos la suma:

$$\sum_{i=0}^{n-1} f[x(\tau_i), \ y(\tau_i), \ z(\tau_i)][x_{i+1} - x_i] \qquad (4)$$

en la que $\tau_i$ representa el valor de $\underline{t}$ correspondiente a un punto cualquiera del arco $\widehat{P_i P_{i+1}}$ de la curva C.

Vamos a probar que la suma (4) tiene límite cuando $n \to \infty$ de tal modo -

que tiendan a cero los $\Delta x_i = x_{i+1} - x_i$. Dicho límite se llama **integral curvilínea** de la función $f(x, y, z)$ a lo largo del arco AB y se representa por la notación:

$$\int_C f(x, y, z)\, dx \tag{5}$$

Como $x_{i+1} - x_i = \Delta t_i \cdot x'(\tau'_i)$ resulta que (4) se puede poner:

$$\sum_{i=0}^{n-1} f[x(\tau_i),\ y(\tau_i),\ z(\tau_i)] \cdot x'(\tau'_i)\, \Delta t_i \tag{6}$$

La expresión (6) tiene una estructura muy parecida a la de aquellas sumas cuyo límite conduce a una integral definida. La única diferencia estriba en la presencia de los números $\tau_i$ y $\tau'_i$ que en general son diferentes.

Pero en virtud de la continuidad uniforme de la función $f(x, y, z)$, se tiene, que:

$$f[x(\tau_i), y(\tau_i), z(\tau_i)] = f[x(\tau'_i),\ y(\tau'_i),\ z(\tau'_i)] + \varepsilon_i$$

donde todos los $\varepsilon_i$ cumplen $|\varepsilon_i| < \varepsilon$ en cuanto sea $|\tau_i - \tau'_i|$ suficientemente pequeño.

Luego (6) se puede escribir:

$$\sum_{i=0}^{n-1} f[x(\tau'_i),\ y(\tau'_i),\ z(\tau'_i)]\, x'(\tau'_i)\Delta t_i + \sum_{i=0}^{n-1} \varepsilon_i\, x'(\tau'_i)\, \Delta t_i \tag{7}$$

El primer sumando de (7) tiene como límite:

$$\int_a^b f[x(t),\ y(t),\ z(t)]\, x'(t)\, dt \tag{8}$$

En cuanto al segundo sumando, en valor absoluto es menor que:

$$\varepsilon \left| \sum_{i=0}^{n-1} x'(\tau'_i)\, \Delta t_i \right|$$

y puede hacerse tan pequeño como se quiera eligiendo $\varepsilon$ suficientemente pequeño.

Con ello hemos demostrado que la integral curvilínea (5) existe y que su valor se calcula mediante (8), que es una integral definida ordinaria.

Igualmente se definen las integrales curvilíneas de los tipos:

$$\int_C f(x,y,z)\ dy \ ,, \quad \int_C f(x,y,z)dz$$

Finalmente son especialmente interesantes para la Física la reunión de integrales de los tres tipos que resulta al considerar un arco de curva C con las condiciones citadas antes y tres funciones

$$X(x,y,z) ,, \quad Y(x,y,z) ,, \quad Z(x,y,z)$$

que cumplan las mismas condiciones de continuidad que la $f(x,y,z)$, y que se representan mediante la notación:

$$\int_C [X(x,y,z)dx + Y(x,y,z)\ dy + Z(x,y,z)dz]$$

Para integrales curvilíneas planas, se simplifica el estudio hecho, puesto que no existe la variable z, pero las condiciones son válidas.

No presenta, tampoco ninguna dificultad, extender el concepto a un espacio n-dimensional, como se indicó inicialmente.

2.- Cálculo de la integral curvilínea.-

De la definición anterior se desprende el procedimiento de cálculo de las integrales curvilíneas.

Supongamos que queremos calcular:

$$\int_\gamma X(x,y,z).dx + Y(x,y,z)dy + Z(x,y,z)dz$$

a lo largo del arco de curva $\gamma$, definido por las ecuaciones paramétricas.

$$x = x(t) \qquad y = y(t) \qquad z = z(t)$$

estando los extremos A y B de dicho arco $\gamma$, definidos para los valores del parámetro $t_0$ y $t_1$ respectivamente y cumpliendo las funciones X, Y, Z, así como las ecuaciones de la curva las condiciones fijadas en el número anterior.

Bastará sustituir en la integral $x, y, z$ y sus diferenciales por sus valores en función de t, y quedará:

$$\int_{\gamma} X(x,y,z)dx + Y(x,y,z)dy + Z(x,y,z)dz = \int_{t_0}^{t_1} X[x(t),y(t),z(t)].x'(t)dt +$$

$$+Y[x(t),y(t),z(t)].y'(t)dt + Z[x(t),y(t),z(t)].z'(t)dt$$

quedando así pues una integral ordinaria que se calculará por los procedimientos conocidos.

De aquí se desprenden estas dos propiedades:

a) Si tomamos un punto cualquiera M del arco $\gamma$ comprendido entre sus extremos A y B, se verificará:

$$\int_A^B = \int_A^M + \int_M^B$$

b) Si cambiamos el sentido del recorrido del arco $\gamma$, la integral curvilínea cambia de signo.

3.- Concepto de función potencial.-

Puede ocurrir que la función subintegral sea la diferencial exacta de una función $U(x,y,z)$ que llamaremos, cuando exista, función potencial de X, Y, Z.

$$dU \equiv X.dx + Y.dy + Z.dz = \frac{\partial U}{\partial x}dx + \frac{\partial U}{\partial y}.dy + \frac{\partial U}{\partial z}\ dz$$

$$\frac{\partial U}{\partial x} = X, \frac{\partial U}{\partial y} = Y \frac{\partial U}{\partial t} = Z$$

Vamos a demostrar que si existe una función potencial en un dominio espacial, la

$$\int_{A(x_0,y_0,z_0)}^{B(x_1,y_1,z_1)} Xdx + Ydy + Zdz$$

depende sólo de los extremos del arco $A(x_0, y_0, z_0)$ y $B(x_1, y_1, z_1)$, siendo independiente de la curva que los une en dicho dominio.

La demostración es sencilla; sean $x = x(t)$, $y = y(t)$, $z = z(t)$ las ecuaciones paramétricas de la curva que une A y B y sean $t_0$ y $t_1$ los valores del parámetro correspondientes a los puntos A y B. Sustituyendo en la integral quedará:

$$\int_{A(x_0, y_0, z_0)}^{B(x_1, y_1, z_1)} X(x, y, z)dx + Y(x, y, z)dy + Z(x, y, z) = \int_{A(x_0, y_0, z_0)}^{B(x_1, y_1, z_1)} dU(x, y, z) =$$

$$= \int_{t_0}^{t_1} dU[x(t), y(t), z(t)] = \Big| U[x(t), y(t), z(t)] \Big|_{t_0}^{t_1} =$$

$$= U[x(t_1), y(t_1), z(t_1)] - U[x(t_0), y(t_0), z(t_0)] =$$

$$= U(x_1, y_1, z_1) - U(x_0, y_0, z_0) = U_B - U_A$$

Queda pues el valor de la integral como la diferencia entre los valores de la función potencial en los extremos del arco $\gamma$, independientemente de la curva que los unía.

El recíproco se puede expresar así: Si las funciones $X(x, y, z)$, $Y(x, y, z)$, $Z(x, y, z)$ son continuas en un cierto dominio espacial y la integral curvilínea:

$$\int_\gamma Xdx + Ydy + Zdz$$

no depende del arco de curva $\gamma$, sino sólo de sus extremos, cualquiera que sean éstos, dentro del mismo dominio, existe una función potencial de X, Y, Z en él.

Para demostrarlo, calculemos la integral curvilínea entre el punto fijo $(x_0, y_0, z_0)$ y el variable $(x, y, z)$. Calculemos el incremento que experimenta dicha función al incrementar la abscisa x del extremo en $\Delta x$:

$$U = \int_{(x_0, y_0, z_0)}^{(x, y, z)} X.dx + Y.dy + Z.dz$$

$$\Delta_x U = \int_{(x, y, z)}^{(x+\Delta x, y, z)} Xdx + Ydy + Zdz$$

como por hipótesis, es independiente del camino, elegimos un segmento paralelo al eje x, o sea $dy = dz = 0$, y queda:

$$\Delta_x U = \int_x^{x+\Delta x} X(x, y, z)dx = \Delta x . X(\xi, y, z); \quad x \leqslant \xi \leqslant x + \Delta x$$

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta_x U}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} X(\xi, y, z) = X(x, y, z) = \frac{\partial U}{\partial x}$$

ya que $X(x, y, z)$ es una función continua.

De modo similar demostraríamos

$$\frac{\partial U}{\partial y} = Y, \quad \frac{\partial U}{\partial z} = Z$$

4.- Cálculo de la función potencial. -

Supongamos que las funciones $X(x, y, z)$, $Y(x, y, z)$, $Z(x, y, z)$ sean continuas, derivables y con derivadas continuas. Vamos a calcular de forma separada la función potencial en el plano y en el espacio.

a) Cálculo de la función potencial en el plano. Supuestas las condiciones anteriores para $X(x-y)$, $Y(x-y)$, es necesario que se verifique la igualdad de las derivadas cruzadas, de acuerdo con el teorema de Schwarz, ya que se tiene:

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial U}{\partial x} &= X(x, y) \\ \frac{\partial U}{\partial y} &= Y(x, y) \end{aligned}\right\} \quad \frac{\partial^2 U}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 U}{\partial y \partial x}, \text{ o sea : } \quad \frac{\partial Y}{\partial x} = \frac{\partial X}{\partial y} \qquad (1)$$

Recíprocamente, vamos a demostrar que si se cumple la relación (1), existe función potencial que vamos a calcular además.

Para ello, planteamos las ecuaciones que definen $U(x, y)$:

$$\frac{\partial U}{\partial x} = X(x, y) \quad (2) \qquad\qquad \frac{\partial U}{\partial y} = Y(x, y) \quad (3)$$

Integramos (2) respecto de $x$, considerando $y$ constante, por lo tanto la constante de integración será, en general, una función $\varphi(y)$ que habrá que determinar posteriormente.

$$U = \int X(x, y)dx + \varphi(y) \qquad (4)$$

Derivamos (4) respecto de $y$, e igualamos con (3),

$$\frac{\partial U}{\partial y} = \int X'_y(x, y)dx + \varphi'(y) = Y(x, y)$$

$$\varphi'(y) = Y(x, y) - \int X'_y(x, y)dx \quad (5)$$ e integrando respecto de $y$.

$$\varphi(y) = \int \left[Y - \int X'_y . dx\right]dy$$ sustituyendo en (4) queda:

$$U(x,y) = \int X.dx + \int [Y - \int X'_y.dx].dy$$

Obsérvese que $\varphi(y)$ es una función sólo de $y$, por lo que a $\varphi'(y)$ le pasará lo mismo. Por lo tanto $\frac{d}{dx}[\varphi'(y)] = 0$. Derivando (5) queda:

$$\frac{d}{dx}[\varphi'(y)] = \frac{\partial Y}{\partial x} - \frac{\partial X}{\partial y} = 0 \quad \text{por hipótesis.}$$

Luego podemos afirmar que la condición necesaria y suficiente para que la expresión $X.dx + Y.dy$ sea diferencial exacta es que las derivadas cruzadas sean iguales.

b) Cálculo de la función potencial en el espacio. Supuestas las condiciones anteriores para $X(x,y,z)$, $Y(x,y,z)$, $Z(x,y,z)$, es necesario que se verifique la igualdad de las derivadas cruzadas, de acuerdo con el teorema de Schwarz, ya que se tiene:

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial U}{\partial x} &= X \\ \frac{\partial U}{\partial y} &= Y \\ \frac{\partial U}{\partial z} &= Z \end{aligned}\right| \quad \left.\begin{aligned} \frac{\partial^2 U}{\partial x \partial y} &= \frac{\partial^2 U}{\partial y \partial x} \\ \frac{\partial^2 U}{\partial x \partial z} &= \frac{\partial^2 U}{\partial z \partial x} \\ \frac{\partial^2 U}{\partial y \partial z} &= \frac{\partial^2 U}{\partial z \partial y} \end{aligned}\right| \text{ o sea } \left.\begin{aligned} \frac{\partial X}{\partial y} &= \frac{\partial Y}{\partial x} \\ \frac{\partial X}{\partial z} &= \frac{\partial Z}{\partial x} \\ \frac{\partial Y}{\partial z} &= \frac{\partial Z}{\partial y} \end{aligned}\right\} \qquad (6)$$

Recíprocamente, vamos a demostrar que si se cumplen las tres relaciones (6), existe función potencial que vamos a calcular además. Para ello, planteamos las ecuaciones que definen $U(x,y,z)$.

$$\frac{\partial U}{\partial x} = X \qquad (7)$$

$$\frac{\partial U}{\partial y} = Y \qquad (8)$$

$$\frac{\partial U}{\partial z} = Z \qquad (9)$$

Integramos la (7) respecto de $x$, considerando $y$, $z$ como constantes, por lo que la constante de integración, en general, será una función $\varphi(y,z)$ que habrá que determinar.

$$U = \int X.dx + \varphi(y,z) \qquad (10)$$

Para hallar $\varphi(y,z)$ derivamos (10) respecto de y, z e igualamos a (8) y (9) respectivamente:

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial U}{\partial y} &= \int X'_y . dx + \varphi'_y(y,z) = Y \\ \frac{\partial U}{\partial z} &= \int X'_z . dx + \varphi'_z(y,z) = Z \end{aligned}\right\}$$

$$\left.\begin{aligned} \varphi'_y(y,z) &= Y - \int X'_y . dx \qquad (11) \\ \varphi'_z(y,z) &= Z - \int X'_z . dx \qquad (12) \end{aligned}\right\}$$

Integramos (11) respecto de y, considerando z constante, por lo tanto habrá que sumarle una constante de integración que será una función sólo de z, - $\Psi(z)$.

$$\varphi(y,z) = \int [Y - \int X'_y . dx ] . dy + \Psi(z) \qquad (13)$$

Derivamos (13) respecto de z e igualamos con (12):

$$\varphi'_z(y,z) = \int [Y'_z - \int X''_{yz} . dx ] dy + \Psi'(z) = Z - \int X'_z dx$$

de donde:

$$\Psi'(z) = Z - \int X'_z . dx - \int [Y'_z - \int X''_{yz} . dx ] dy$$

$$\Psi'(z) = \int \left\{ Z - \int X'_z dx - \int [Y'_z - \int X''_{yz} dx ] dy \right\} . dz \qquad (14)$$

Sustituyendo (14) en (13) y en (10) queda:

$$U(x,y,z) = \int X.dx + \int [Y - \int X'_y . dx ] . dy + \int \left\{ Z - X'_z dx - \int [Y'_z - \int X''_{yz} dx ] dy \right\} dz$$

Obsérvese que $\varphi'_y(y,z)$ es función sólo de y, z, así como $\varphi'_z(y,z)$ es función sólo de y, z, asímismo $\Psi'(z)$ lo es sólo de z.

Por lo tanto:

$$\frac{\partial}{\partial x}[\varphi'_y] = 0, \quad \frac{\partial}{\partial x}[\varphi'_z] = 0, \quad \frac{\partial}{\partial x}[\Psi'(z)] = 0,$$

$$\frac{\partial}{\partial y}[\Psi'(z)] = 0.$$

Derivando las ecuaciones correspondientes queda:

$$\frac{\partial X}{\partial y} - \frac{\partial Y}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial X}{\partial z} - \frac{\partial Z}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial Y}{\partial z} - \frac{\partial Z}{\partial y} = 0$$

que se anulan por hipótesis.

Luego podemos afirmar que la condición necesaria y suficiente para que la expresión $X.dx + Y.dy + Z.dz$ sea diferencial exacta es que las derivadas cruzadas (6) sean iguales.

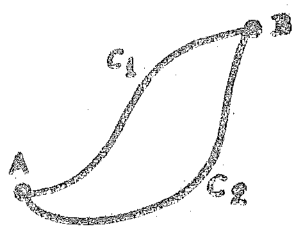
5.- Conclusiones adicionales.-

Vistas las condiciones de existencia de la función potencial, así como el cálculo de la misma, se pueden establecer las siguientes equivalencias, entre estas relaciones:

a) Existencia de la función potencial.

b) Igualdad de las derivadas cruzadas

c) Independencia de la integral del camino recorrido.




Si la integral es independiente del camino, quiere decir, que a lo largo del arco $C_1$ es igual que a lo largo del arco $C_2$, o sea:

$$\int_{A(C_1)}^{B} = \int_{A(C_2)}^{B} \quad ó \quad \int_{A(C_1)}^{B} + \int_{B(C_2)}^{A} = 0$$

lo que equivale a afirmar que la integral curvilínea recorrida en un mismo sentido en el contorno cerrado $AC_1BC_2A$ es nula.

O sea la condición necesaria y suficiente para que la integral curvilínea $\int Xdx + Ydy + Zdz$ a lo largo de una curva cerrada sea nula es que sean iguales en el dominio las derivadas cruzadas.

6.- Puntos singulares.-

Consideremos el siguiente ejemplo: Calcular la integral curvilínea:

$$\int_C - \frac{y}{x^2 + y^2} dx + \frac{x}{x^2+y^2} dy$$

a lo largo del contorno de la circunferencia $x^2 + y^2 = 1$.

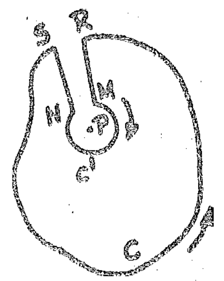
La función subintegral admite función potencial $U(x, y) = \operatorname{arctg} \frac{y}{x}$ y se puede poner:

$$\int_C - \frac{y}{x^2+y^2} dx + \frac{x}{x^2+y^2} dy = \int_C d\left[\operatorname{arctg} \frac{y}{x}\right] = \int_0^{2\pi} dt = 2\pi$$

Esta integral no se ha anulado, pese a estar extendida a un contorno cerrado y admitir función potencial, luego está aparentemente en contradicción con los teoremas demostrados anteriormente.

La causa de esta diferencia está en no haber tenido en cuenta las condiciones con las que se establecieron dichos teoremas y que exigirá la existencia y continuidad de X, Y, Z así como de sus derivadas en todos los puntos del dominio considerado.

En este ejemplo, las funciones $X = - \frac{y}{x^2 + y^2}$, $Y = \frac{x}{x^2+y^2}$, y sus derivadas no están definidas en el origen. Los puntos que tienen esas características los llamaremos puntos singulares.




Los teoremas precedentes deben pues modificarse en estas condiciones. Para ello, si P es un punto singular se rodea de un entorno C' arbitrariamente pequeño y que suponemos suprimido del dominio encerrado por C.

El contorno cerrado Sc RM c' NS no contiene ya ningún punto singular, por lo que al admitir función potencial, la integral curvilínea a lo largo de él se anula.

Podemos escribir:

$$\int_{ScRM_{c'}NS} = 0 = \int_{ScR} + \int_{RM} + \int_{M_{c'}N} + \int_{NS}$$

Tomando límites cuando RS $\rightarrow$ 0, se anulará la segunda integral con la cuarta y se podrá escribir:

$$0 = \int_{c\circlearrowleft} + \int_{c'\circlearrowright} \quad ; \quad \int_{c\circlearrowleft} = \int_{c'\circlearrowleft}$$

Para un número finito de puntos $P_1$, $P_2$, ..., $P_k$ efectuaríamos la misma operación con cada uno de ellos, recubriéndolos con entornos $C_1$, $C_2$, ... $C_k$, con lo que podríamos enunciar el teorema anterior de esta forma:

La integral curvilínea a lo largo de dicho contorno cerrado será igual a la suma de las integrales curvilíneas extendidas a los contornos $C_1$, $C_2$, ..., $C_k$.

$$\int_{c\circlearrowleft} = \int_{c_1\circlearrowleft} + \int_{c_2\circlearrowleft} + \ldots + \int_{c_k\circlearrowleft}$$

7.- <u>Circulación de un vector</u>.-

El concepto de integral curvilínea tiene una interpretación fisicomatemática de gran utilidad en la teoría vectorial de campos, y que es el de circulación, denominación que proviene de la teoría de fluidos.

Se llama circulación de un campo vectorial V de componentes X(x, y, z), Y(x, y, z), Z(x, y, z) a lo largo de una línea C, a la integral curvilínea del producto escalar del vector V por el vector dS de componentes dx, dy, dz, tomado sobre dicha línea, o sea:

$$\text{circulación de V a lo largo de C} = \int_c \overline{V}.\overline{dS} = \int_c X.dx + Y.dy + Z.dz$$

Cuando X, Y, Z sean las componentes de un campo de fuerzas, la integral es el trabajo de la masa unidad al recorrer la línea.

8.- Ejemplos.-

8.1.- Demostrar que:

$$\frac{adx}{z} - \frac{bdy}{z} + \frac{by-ax}{z^2}$$

es diferencial exacta y hallar la función potencial.

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x} = 0$$

$$\frac{\partial R}{\partial x} = \frac{\partial P}{\partial z} = -\frac{a}{z^2}$$

$$\frac{\partial Q}{\partial z} = \frac{\partial R}{\partial y} = \frac{b}{z^2}$$

La función potencial $U = U(x, y, z)$ se hallará así:

$$U = \int \frac{a}{x} dx + \varphi(y, z) = \frac{ax}{z} + \varphi(y, z)$$

$$\frac{\partial U}{\partial y} = -\frac{b}{z} = \varphi'_y(y, z)$$

$$\frac{\partial U}{\partial z} = \frac{by-ax}{z^2} = -\frac{ax}{z^2} + \varphi'_z(y, z)$$

$$\varphi(y, z) = -\frac{by}{z} + \Psi(z)$$

$$\varphi'_z(y, z) = \frac{by}{z^2} + \Psi'(z) = \frac{by}{z^2}, \text{ luego } \Psi'(z) = 0,\ \Psi(z) = C$$

sustituyendo

$$U = \frac{ax-by}{z} + C$$

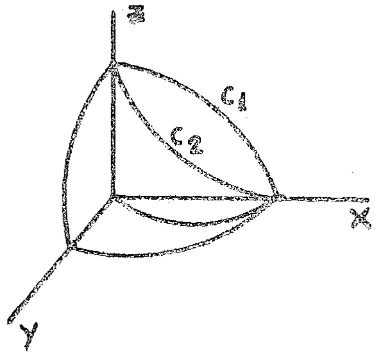
8.2.- Calcular:

$$\int_C 2yz^2 dx + xz^2 dy + 3xy\ zdz, \text{ siendo } C$$

el contorno cerrado situado en la esfera $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$ y formado por los arcos:

$$c_1 \left\{ \begin{array}{l} x^2 + y^2 + z^2 = a^2 \\ y = 0 \\ x > 0,\quad z > 0 \end{array} \right\} \quad y$$

$$c_2 \left\{ \begin{array}{l} x^2 + y^2 + z^2 = a^2 \\ x^2 + y^2 - ax = 0 \\ y > 0,\quad z > 0 \end{array} \right\}$$




$$I = I_{c_1} + I_{c_2}$$

en el arco $c_1$ se tiene $y = 0$, $dy = 0 \Longrightarrow I_{c_1} = 0$.

en $c_2$, utilizamos polares $\begin{cases} x = \rho \operatorname{sen}\theta \cdot \cos\varphi \\ y = \rho \cdot \operatorname{sen}\theta \cdot \operatorname{sen}\varphi \\ z = \rho \cdot \cos\theta \end{cases}$

que para la línea $c_2$, como se tiene: $\begin{pmatrix} \rho = a \\ \operatorname{sen}\theta = \cos\varphi \\ \theta = \dfrac{\pi}{2} - \varphi \end{pmatrix}$ quedarán como:

ecuaciones paramétricas de $c_2$ las siguientes: $\begin{cases} x = a.\cos^2\varphi \\ y = a \operatorname{sen}\varphi \cos\varphi \\ z = a.\operatorname{sen}\varphi \end{cases}$ diferenciando y sustituyendo:

$$I_{c_2} = \int_0^{\pi/2} a^4(-5\operatorname{sen}^4\varphi \cdot \cos^2\varphi + 4\cos^4\varphi \cdot \operatorname{sen}^2\varphi)d\varphi = -\frac{\pi a^4}{32}$$

$$I = I_{c_1} + I_{c_2} = -\frac{\pi a^4}{32}$$

# 5

# Integral Doble

## LECCION 5

## INTEGRAL DOBLE

### 1.- Concepto de integral doble.-

El concepto de integral definida de Riemann $\int_a^b f(x)\,dx$ es generalizable sustituyendo el intervalo $[a, b]$ por una región n-dimensional en la que esté definida y acotada la función f. Así para n = 2, obtendremos una integral doble y para n = 3 una triple. Vamos a detallar el caso de integral doble.

Consideremos la función $z = f(x, y)$, definida y acotada en todos los puntos del dominio R perteneciente al plano xy.

Realizamos una partición del dominio R mediante curvas arbitrarias, en m partes que llamaremos parcelas, representando dichas partes, así como sus áreas por:

$$\Delta\omega_1, \quad \Delta\omega_2, \ldots, \Delta\omega_k, \ldots, \Delta\omega_m$$

En cada una de estas parcelas elegimos un punto arbitrario $p_k \in \Delta\omega_k$, y formamos la suma de los valores de la función f en cada uno de dichos puntos por el área de la parcela correspondiente, llamando a esta expresión "suma integral":

$$\sum_{k=1}^{m} f(p_k).\Delta\omega_k = f(p_1)\Delta\omega_1 + f(p_2)\Delta\omega_2 + \ldots + f(p_m)\,\Delta\omega_m = S_m$$

Se observa que cuando la función $f(x, y)$ es positiva en R, cada sumando $f(p_k)\Delta\omega_k$ representa geométricamente el volumen de un cilindro elemental de base $\Delta\omega_k$ y altura $f(p_k)$, y $S_m$ representa la suma de los volúmenes elementales indicados.

Volvemos a dividir el dominio R y consideramos el conjunto formado por las divisiones antiguas y las nuevas, obteniendo $m_2$ parcelas $(m_2 \geqslant m)$ y una nueva suma integral:

$$\sum_{k=1}^{m_2} f(p'_k)\Delta\omega'_k = f(p'_1)\Delta\omega'_1 + \ldots + f(p'_{m_2})\,\Delta\omega'_{m_2} = S_{m_2}$$

$$\Delta\omega'_k \leqslant \Delta\omega_k$$

Repetimos n veces este proceso, exigiendo que los diámetros de las parcelas formen una sucesión nula y por tanto que el área de cada parcela tienda a cero, cuando $n \to \infty$, obteniendo una sucesión de sumas integrales.

$$S_m, \; S_{m_2}, \; \ldots, \; S_{m_n}, \; \ldots$$

Siendo $S_{m_n} = \sum_{k=1}^{m_n} f(p_k^{(n-1)}).\,\Delta\omega_k^{(n-1)}$

Decimos que existe la integral doble según Riemann de $f(x,y)$ en R y la representamos por L, si dado un número $\varepsilon > 0$ y arbitrario, se puede encontrar un valor p, tal que para $n \geqslant p$, se tenga: $|S_{m_n} - L| < \varepsilon$, cualquiera que sean los puntos $p_k$ elegidos en cada parcela $\Delta\omega_k$.

Este límite L se llama integral doble de la función $f(x,y)$ extendida al dominio R y se representa así:

$$L = \iint_R f(p)d\omega = \iint_R f(x,y)dx.dy = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} f(p_k)\ \Delta\ \omega_k$$

Si llamamos $M_k$ y $m_k$ a los extremos superior e inferior de la función en cada parcela $\omega_k$ y formamos las sumas:

$$\sum_{k=1}^{m} M_k \Delta\omega_k = M_1\Delta\omega_1 + M_2\Delta\omega_2 + \ldots + M_m.\Delta\omega_m = S$$

$$\sum_{k=1}^{m} m_k \Delta\omega_k = m_1\Delta\omega_1 + m_2\Delta\omega_2 + \ldots + m_k\Delta\omega_k = s$$

como

$$m_k \leqslant f(p_k) \leqslant M_k \text{ se tendrá:}$$

$$\sum m_k \Delta\omega_k \leqslant \sum f(p_k)\,\Delta\omega_k \leqslant \sum M_k \Delta\omega_k\ ; \quad \text{ó sea } s \leqslant S_m \leqslant S$$

del mismo modo que antes, para las sucesivas particiones del recinto R, se tendrá:

$$s_n \leqslant S_{m_n} \leqslant S_n\ ; \qquad n = 1, 2, \ldots, p, \ \ldots, \ n, \ldots$$

Si las sucesiones así formadas $s_n$ y $S_n$, cumplen la condición de que dado un $\varepsilon$ positivo y arbitrario, se puede encontrar un valor p, tal que para $n > p$ se verifique $|S_n - s_n| < \varepsilon$, tendrán ambas igual límite que coincidirá con el de la sucesión $S_{m_n}$ y se tendrá pues

$$s_n < \iint_R f(x,y).d\omega < S_n$$

$$\lim_{n\to\infty} s_n = \lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty} \sum_{1}^{n} f(p_k)\Delta\,\omega_k = \iint_R f(x,\ y).d\omega$$

2.- Funciones Integrables.-

Vamos a demostrar que si la función $f(x,y)$ es continua en el dominio R, es integrable según Riemann en él.

Por ser la función continua en R, será uniformemente continua en él, por lo que dado un valor $\varepsilon > 0$ y arbitrario, se podrá encontrar un $\delta$, tal que para todo par de puntos P y P' tales que $\overline{PP'} < \delta$, se tendrá: $|f(P)-f(P')| < \varepsilon$,

Por lo tanto:

$$S_n - s_n = \sum_{k=1}^{n} (M_k - m_k).\Delta\omega_k < \varepsilon \sum_{1}^{n} \omega_k = \varepsilon(\text{Area de R})$$

$M_k$ y $m_k$ serán los máximos y mínimos absolutos de la función en la parcela $\Delta\omega_k$ (por ser la función continua) y su diferencia será la oscilación máxima entre dos puntos cualesquiera P y P' de dicha parcela:

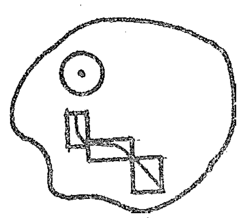
$$|f(P)-f(P')| < |M_k - m_k| < \varepsilon$$

por lo que bastará que el diámetro máximo de cada parcela sea menor que $\delta$.

Si la función $f(x,y)$ no es continua en R, pero estando acotada en dicho dominio, tiene un número finito de puntos aislados de discontinuidad $P_1, P_2, \dots P_k$, o es discontinua a lo largo de una curva de Jordan interior al dominio, o en un conjunto de puntos recubribles por entornos cuya área total tiende a cero, se mantiene la existencia de la integral doble, ya que la expresión

$$S_n - s_n = \sum (M_k - m_k)\Delta\omega_k$$

solo sufriría modificación en los sumandos correspondientes a las parcelas $\Delta\omega_k$ que contengan dichos puntos. Pero como la oscilación está acotada $M_k - m_k < k$ (oscilación total de la función en R), todos esos sumandos se podrán hacer $< k\Sigma\omega_k$ siendo $\Sigma\omega_k$ la suma de las áreas de las parcelas que los recubren que por hipótesis tiende a cero.



## 3.- Propiedades de la integral doble.-

### 3.1.- Propiedad aditiva del integrando.-

La integral doble, extendida a un dominio R, de una suma de un número p finito de funciones $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_p$, es igual a la suma de las p integrales dobles, extendidas a R, de cada una de dichas funciones.

$$\iint_R [\varphi_1(x,y)+\varphi_2(x,y)+\ldots+\varphi_p(x,y)]\,.d\omega = \iint_R \varphi_1(x,y)d\omega+\ldots+\iint_R \varphi_p(x,y)d\omega$$

### 3.2.- Linealidad.-

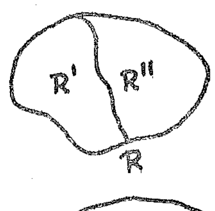
La integral doble, extendida a un dominio R, de una constante por una función, es igual a la constante por la integral doble de la función, en el mismo dominio R.

$$\iint_R k.f(x,y).d\omega = k.\iint_R f(x,y)d\omega$$

La demostración de ambas propiedades es trivial e idéntica a la correspondiente en integrales simples.

### 3.3.- Propiedad aditiva del dominio de integración.-

Si la función f(x, y) es integrable en el dominio R, y dividimos dicho dominio en otros dos R' y R'' sin poseer puntos interiores comunes, será también integrable en cada uno de ellos y se verificará:




$$\iint_R f(x,y)d\omega = \iint_{R'} f(x,y)d\omega + \iint_{R''} f(x,y)d\omega$$

Para demostrarlo, bastará descomponer la suma integral de la forma:

$$\sum_R f(p_k)\Delta\,\omega_k = \sum_{R'} f(p_k)\Delta\,\omega_k + \sum_{R''} f(p_k)\Delta\omega_k$$

Como la integral doble no depende de la forma de dividir el dominio R, se efectúa la división de forma que la frontera entre R' y R'' sea una división de R.

3.4.- Acotación.-

Si la función $f(x,y) \leqslant \varphi(x,y)$ en R, se verificará

$$\iint_R f(x,y)d\omega \leqslant \iint_R \varphi(x,y)d\omega$$

Es evidente ya que $\iint_R [f(x,y) - \varphi(x,y)]\,d\omega \leqslant 0$ y aplicando la propiedad primera quedará:

$$\iint_R f(x,y)d\omega - \iint_R \varphi(x,y)d\omega \leqslant 0$$

También podemos establecer la acotación del módulo de la integral. Si se tiene: $|f(x,y)| < M$ en R.

$$\left|\iint_R f(x,y)\;d\omega\right| \leqslant \iint_R |f(x,y)|\;d\omega < M.\iint_R d\omega = M.A_R$$

donde $A_R$ es el área del recinto R.

3.5.- Teorema de la media.-

Consideremos la función $f(x,y)$ integrable en un dominio R y sean M y m los extremos superior e inferior respectivamente de la función $f(x,y)$ en R, verificando pues, para cualquier punto $(x_k, y_k)$ de R:

$$m \leqslant f(x_k, y_k) \leqslant M$$

$m.\,\Delta\omega_k \leqslant f(x_k, y_k).\,\Delta\omega_k \leqslant M.\,\Delta\omega_k$, luego:

$\sum_{1}^{n} m.\,\Delta\omega_k < \sum_{1}^{n} f(x_k, y_k).\,\Delta\omega_k < \sum_{1}^{n} M.\,\Delta\omega_k$, tomando límites

$m.A_R < \iint_R f(x, y).\,d\omega < M.A_R$ siendo $A_R$ el área encerrada en el dominio R. La desigualdad anterior permite escribir

$$\iint_R f(x, y)d\omega = \lambda\,.\,A_R, \quad \text{siendo} \quad m < \lambda < M$$

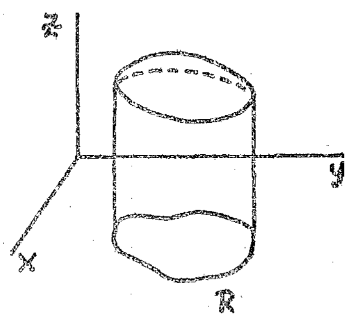
cuando la función $f(x, y)$ sea continua en R, pasará del mínimo absoluto m al máximo absoluto M por todos los valores intermedios, luego existirá al menos un punto $(x_0, y_0) \in R$ en donde $f(x_0, y_0) = \lambda$ y se podrá decir que la integral doble de una función continua $f(x, y)$ en un dominio R es igual al valor de la función en un punto $p_0(x_0, y_0)$ de dicho dominio por el área del mismo.

$$\iint_R f(x, y)d\omega = f(x_0, y_0).A_R$$

4.- Cálculo de áreas y volúmenes utilizando integrales dobles.-

Del concepto de integral definida ya visto, se desprende que el volumen del cilindroide limitado por la superficie no negativa $f(x, y)$ para $(x, y) \in R$, el plano $z = 0$ y el cilindro recto de generatrices paralelas al eje OZ y directriz la frontera del dominio R, viene dado por

$$V = \iint_R f(x, y)d\omega$$




Si el cuerpo del que queremos hallar el volumen está limitado por las superficies $z = f_2(x, y)$ y $z = f_1(x, y)$, siendo $f_2(x, y) \geqslant f_1(x, y)$, para todo $(x, y) \in R$

el volumen se podrá expresar así:

$$V = \iint_R [f_2(x, y) - f_1(x, y)]\, d\omega$$

Si en el caso primero, la función f(x, y) cambia de signo en el dominio R, siendo positiva o nula en $R_1$ y negativa o nula en $R_2$, $R = R_1 + R_2$, el volumen del cilindroide será:

$$V = \iint_{R_1} f(x, y)d\omega - \iint_{R_2} f(x, y)d\omega$$

Para hallar áreas planas, por ejemplo la del dominio R, consideremos la función f(x, y) = 1; la $\iint_R f(x, y)d\omega = \iint_R d\omega$ representa el volumen de un cilindroide de base R y de altura la unidad, luego:

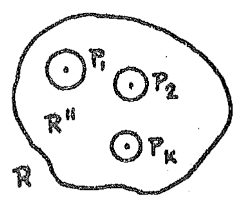
$$V = A_R . 1 = A_R = \iint_R d\omega$$

5.- <u>Generalización del concepto de integral doble</u>.-

En la definición de integral doble, se ha considerado una función f(x, y) acotada y un dominio plano limitado R. Vamos a extender la definición de integral doble para los casos de funciones no acotadas y de dominios ilimitados.

a) <u>Caso de función no acotada</u>.

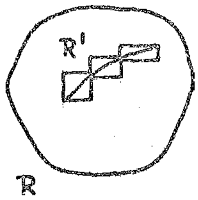
Si la función f(x, y) se hace infinita en un número finito de puntos $(x_0, y_0)$, ..., $(x_k, y_k)$ del dominio R, se recubren dichos puntos con entornos $R_k$ que por ejemplo pueden ser círculos de radio ε interiores a R, llamando $R' = R_1 + R_2 + ... + R_k$; $R = R' + R''$. Se calcula el límite de la integral doble extendida a R'', cuando $\varepsilon \to 0$ y, si dicho límite existe, lo llamaremos por definición integral doble de f(x, y) extendida a R.



$$\iint_R f(x,y)d\omega = \lim_{\varepsilon \to 0} \iint_{R''} f(x,y)d\omega$$

Análogamente, si existe un conjunto infinito de puntos en los que se hace infinita la función f(x, y), y se pueden recubrir dichos puntos por recintos R' cuya área tiende a cero eligiendo R' convenientemente, diremos por definición que

$$\iint_R f(x,y)d\omega = \lim_{R' \to 0} \iint_{R''} f(x,y)d\omega$$




siempre que este límite sea independiente de la forma de elegir los recintos R'.

b) Caso de dominios ilimitados. -

Consideremos un dominio ilimitado R y construyamos una sucesión de dominios $R_1$, $R_2$, ..., $R_n$, ... tal que $\lim_{n \to \infty} R_n = R$. Definimos como integral doble extendida a R, al límite de la integral doble extendida a $R_n$, cuando $n \to \infty$, siempre que ese límite exista y sea el mismo para cualquier sucesión $R'_n$ de límite R. Si el límite de $R_n$ es R cada recinto parcial de R es interior a los dominios $R_n$, a partir de un valor de n.

$$\iint_R f(x,y)d\omega = \lim_{n \to \infty} \iint_{R_n} f(x,y)d\omega = \lim_{n \to \infty} \iint_{R'_n} f(x,y)d\omega$$

Si R es todo el plano, podemos formar la sucesión de dominios $R_1$, $R_2$.. . $R_n$, ... como círculos de centro el origen y radios crecientes, pero también se podría definir dicha sucesión como cuadrados de centro el origen y lados crecientes o rectángulos, etc. y dicho límite debe existir y ser el mismo para todas las sucesiones que elijamos, por lo que se ve la dificultad de expresar de un modo general, para cualquier función f(x, y), esta definición.

Caso particular es que la función f(x, y) tenga signo constante en todo el dominio R, en cuyo caso vamos a demostrar que dicho límite es independiente -

de la sucesión que elijamos. Supongamos $f(x,y) \geqslant 0$ en R y que $\iint_R f(x,y)d\omega$ tiene límite para una sucesión de dominios $R_1, R_2, \ldots R_n, \ldots$ tales que $\lim_{n\to\infty} R_n = R$ y $R_1 \subset R_2 \subset R_3 \subset \ldots \subset R_n \subset \ldots$ Elijamos otra sucesión de dominios $R'_1, R'_2, \ldots, R_n, \ldots,$ tales que $\lim_{n\to\infty} R'_n = R$ y $R'_1 \subset R'_2 \subset R'_3 \subset \ldots \subset R'_n \subset \ldots$

Cualquiera que sea $s$, se podrán encontrar dos valores $p$ y $t$, tales que

$R_p \subset R'_s \subset R_t$ y por lo tanto:

$$\iint_{R_p} f(x,y)d\omega \leqslant \iint_{R'_s} f(x,y)d\omega \leqslant \iint_{R_t} f(x,y)\,d\omega$$

y como:

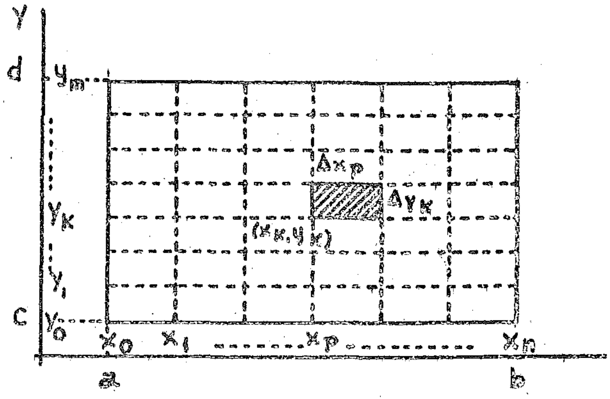
$$\lim_{p\to\infty} \iint_{R_p} f(x,y)d\omega = \lim_{t\to\infty} \iint_{R_t} f(x,y)d\omega = \iint_R f(x,y)\,d\omega$$

la integral del centro tendrá límite y su valor coincidirá con el de las dos entre las que está constantemente comprendida

$$\lim_{s\to\infty} \iint_{R'_s} f(x,y)d\omega = \lim_{n\to\infty} \iint_{R_n} f(x,y)d\omega = \iint_R f(x,y)d\omega$$

## 6.- Cálculo de una integral doble extendida al dominio encerrado por un rectángulo de lados paralelos a los ejes coordenados.-

Consideremos la función $f(x,y)$, continua en el dominio R, limitado por las rectas $x = a$, $x = b$, $y = c$, $y = d$. Como la función es continua, la integral doble extendida a R existe cualquiera que sea la parcelación del dominio que se realice y con independencia de los puntos $p_k$ que se elijan dentro de cada parcela. Por lo tanto parcelamos con paralelas al eje OX, $y = y_0, y=y_1, \ldots, y=y_k, \ldots, y = y_m$, y con paralelas al eje OY, $x = x_0$, $x=x_1, \ldots x=x_p, \ldots, x=x_n$, obteniendo como parcelas rectángulos elementales $\Delta\omega_k$ de área $\Delta\omega_k = \Delta x_p \cdot \Delta y_k$, e impongamos la condición de que estos incrementos tiendan a cero, para cualquier valor de p y k. Asimismo, elegimos como punto $p_k$ el vértice inferior izquierdo del rectángulo elemental $p_k(x_k, y_k)$. La expresión de la suma integral será pues




una suma doble que se podrá escribir así:

$$\sum_{k=0}^{m-1}\sum_{p=0}^{n-1} f(x_p, y_k)\,\Delta x_p \cdot \Delta y_k = \sum_{k=0}^{m-1}\Delta y_k \sum_{p=0}^{n-1} f(x_p, y_k)\,\Delta x_p = \sum_{k=0}^{m-1}\Delta y_k \left[\int_a^b f(x,y)dx + \right.$$

$$\left. + \delta_k\right] = \sum_{k=0}^{m-1}\Delta y_k \int_a^b f(x, y_k)\,.\,dx + \sum_{k=0}^{m-1}\Delta y_k \cdot \delta_k$$

Estas dos últimas igualdades se han escrito teniendo en cuenta que la integral de una función continua de un parámetro se podía expresar como límite uniforme de una suma, como se estudió en las integrales dependientes de un parámetro, por lo que $|\delta_k| < \varepsilon$, cualquiera que sea $y_k$, siempre que $\Delta x_p \to 0$. Así pues

$$\sum_{k=0}^{m-1}\Delta y_k \cdot \delta_k < \varepsilon \sum_{k=0}^{m-1}\Delta y_k = \varepsilon(d-c)$$ que se hace tan pequeño como queramos cuando $\Delta x \to 0$, con lo que quedará tomando límites:

$$\iint_R f(x,y)d\omega = \lim_{\substack{\Delta x_p \to 0 \\ \Delta y_k \to 0}} \sum_{k=0}^{m-1}\sum_{p=0}^{n-1} f(x_p, y_k)\,\Delta x_p \cdot \Delta y_k = \lim_{\Delta x_p \to 0}\sum_{k=0}^{m-1}\Delta y_k \int_a^b f(x, y_k)\,dx =$$

$$= \int_c^d dy\left[\int_a^b f(x,y)dx\right]$$

Se podría haber expresado también, sumando primero por columnas de esta otra forma:

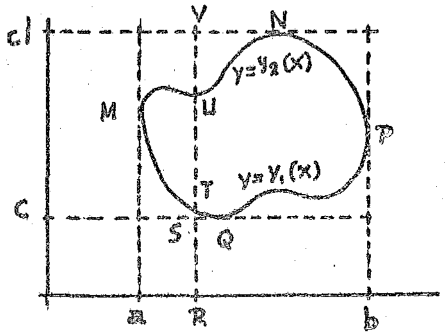
$$\iint_R f(x,y)d\omega = \int_a^b dx\left[\int_c^d f(x,y)dy\right]$$

Podemos generalizar el cálculo anterior para funciones no continuas, pero acotadas, que tengan un número finito de discontinuidades, o un número infinito de puntos de discontinuidad situados a lo largo de curvas de Jordan.

7.- Cálculo de la integral doble en un dominio no rectangular.-

Sea la función f(x, y) continua en el dominio R que está limitado por una curva tal que toda la recta la corta en un número finito de puntos (curva de Jordán). Circunscribimos R en un dominio rectangular de lados paralelos a los ejes coordenados $x = a$, $x = b$, $y = c$, $y = d$ que llamaremos R' y definimos en él una nueva función $\varphi(x, y)$ de la siguiente forma:

$$\left.\begin{array}{lll} \varphi(x,y) = f(x,y) & \text{para} & (x,y) \in R \\ \varphi(x,y) = 0 & \text{para} & (x,y) \notin R \end{array}\right\} \qquad (1)$$




Por definición de integral doble:

$$\iint_{R'} \varphi(x,y)d\omega = \iint_{R} f(x,y)d\omega$$

Como el dominio R' es un rectángulo sabemos calcular la integral doble en él

$$\iint_{R'} \varphi(x,y)d\omega = \iint_{R'} \varphi(x,y)dx.dy = \int_a^b dx\left[\int_c^d \varphi(x,y)dy\right]$$

La integral del corchete, representando las ordenadas de los puntos S, T, U, V por ellos mismos, se podrá escribir teniendo en cuenta que en ella x es una constante ($x = x_R$)

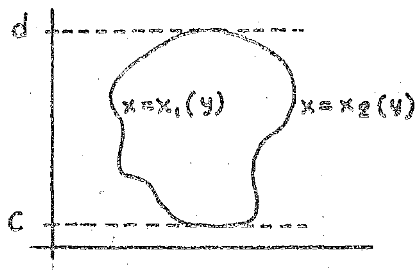
$$\int_c^d \varphi(x,y)dy = \int_S^V \varphi(x,y)dy = \int_S^T \varphi(x,y)dy + \int_T^U \varphi(x,y)dy + \int_U^V \varphi(x,y)dy$$

Por la definición (1) de $\varphi(x, y)$ quedará:

$$\int_c^d \varphi(x, y)dy = \int_T^U \varphi(x, y)dy = \int_T^U f(x, y)dy$$

Si la recta $x = x_a$ corta al contorno del dominio sólo en dos puntos T y U, de coordenadas $y_T = y_1(x_R)$, $y_U = y_2(x_R)$ podemos poner:

$$\iint_R f(x, y)d\omega = \int_a^b dx \left[ \int_{y_1(x)}^{y_2(x)} f(x, y)dy \right]$$



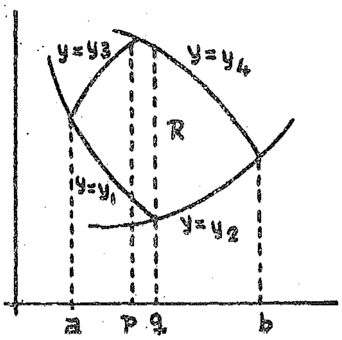

También podríamos haber expresado esta integral, integrando primero respecto a x, obteniendo:

$$\iint_R f(x, y)\, d\omega = \int_c^d dy \int_{x_1(y)}^{x_2(y)} f(x, y)dx$$

Si el dominio está limitado por curvas diferentes, se descompondría en varios, y así para el ejemplo de la figura se podría expresar:

$$\iint_R f(x, y)d\omega = \int_a^p dx \int_{y_1(x)}^{y_3(x)} f(x, y)dy + \int_p^q dx \int_{y_1(x)}^{y_4(x)} f(x, y)dy +$$

$$+ \int_q^b dx \int_{y_2(x)}^{y_4(x)} f(x, y)dy$$




8.- Teorema de Riemann.-

Este teorema debido a Riemann relaciona entre sí la integral curvilinea extendida a un contorno cerrado C, con la integral doble extendida al domino R que tiene a C como contorno, y su enunciado es el siguiente: Sean P(x, y) y -- Q(x, y) dos funciones definidas y continuas en un dominio R limitado por la curva de Jordán C; si las derivadas parciales $\frac{\partial P}{\partial y}$ y $\frac{\partial Q}{\partial x}$ existen y están acotadas en R y existen las integrales dobles de estas derivadas en R, $\iint_R \frac{\partial P}{\partial x}\,dx\,dy$ y $\iint_R \frac{\partial Q}{\partial x}\,dx\,dy$, se cumple que:

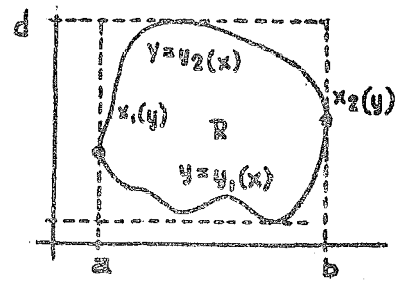
$$\iint_R \left[\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right]dxdy = \int_{c} P.dx + Q.dy$$

Para demostralo, calculemos primero la integral

$$\iint_R \frac{\partial P}{\partial y}\,dxdy = \int_a^b dx \int_{y_1(x)}^{y_2(x)} \frac{\partial P}{\partial y}\,dy = \int_a^b \left[P(x,y)\right]_{y_1(x)}^{y_2(x)} dx = \int_a^b P[x, y_2(x)]dx -$$

$$- \int_a^b P[x, y_1(x)]\,dx = \int_a^b P[x, y_2(x)]dx + \int_b^a P[x, y_1(x)]dx = \oint_c P(x,y)dx = -\oint_c P(x,y)dx \quad (1)$$

ya que la suma de esas dos integrales simples es por definición la integral curvilínea a lo largo del contorno c.




De manera similar podemos poner:

$$\iint_R \frac{\partial Q}{\partial x}\, dx\, dy \int_c^d dy \int_{x_1(y)}^{x_2(y)} \frac{\partial Q}{\partial x}\, dx = \int_c^d Q(x,y)\Big|_{x_1(y)}^{x_2(y)} dy =$$

$$= \int_c^d Q[x_2(y), y]dy - \int_c^d Q[x_1(y), y]dy = \int_c^d Q[x_2(y), y]\, dy + \int_d^c Q\,[x_1(y)]\, dy =$$

$$= \int_{c\circlearrowleft} Q(x,y)dy \qquad (2)$$

Las dos integrales curvilíneas de las fórmulas (1) y (2), tienen el mismo sentido; al recorrerlas según el contorno c, el dominio R que encierra queda a su izquierda; a este sentido lo consideraremos por convenio positivo. Así pues, las fórmulas (1) y (2) obtenidas expresan:

$$-\iint_R \frac{\partial P}{\partial y}\, dx\, dy = +\int_{c\circlearrowleft} P(x,y)dx$$

$$\iint_R \frac{\partial Q}{\partial x}\, dx\, dy = \int_{c\circlearrowleft} Q(x,y)dy$$ sumándolas se obtiene

$$\oint_{c\circlearrowleft} P.\,dx + Q.\,dy = \iint_R \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) dx\, dy$$

Este teorema es también conocido con el nombre de Teorema de Green, en recuerdo del físico y matemático inglés D. Green, siendo un caso particular de una fórmula más general obtenida por el matemático ruso Ostrogradski.

## 9.- Cambio de variables en las integrales dobles.-

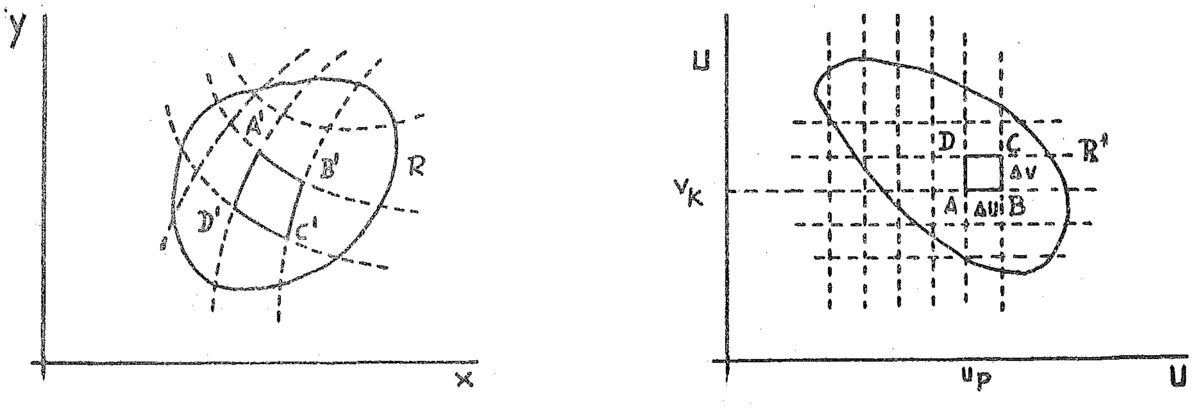
En la práctica, cuando tratamos de calcular una integral doble de una determinada función f(x, y) en un dominio R, nos encontramos con la dificultad de calcular directamente dicha integral, lo mismo que nos sucedía con las integrales simples. Para resolver este problema se plantea la necesidad de efectuar cambios de variable en ellas que simplifiquen la función o el propio dominio de integración.

Supongamos, pues, que queremos calcular $\iint_R f(x, y)dxdy$, siendo la función f(x, y) continua en R, estando dicho dominio limitado por una curva C, y queremos sustituir las variables x, y, por otras nuevas U, V, relacionadas con ellas mediante las ecuaciones de transformación:

$$x = x(U.V); \quad y = y(U.V) \qquad (1)$$

siendo las funciones x(U.V), y(U, V) uniformes, continuas y con derivadas continuas en el dominio R' transformado del R mediante dichas ecuaciones, cumpliéndose además que las ecuaciones (1) establecen una correspondencia biunívoca entre (x, y) y (U, V)y por consiguiente entre los dominios R y R'.

Si consideramos una recta U = constante en R', por las ecuaciones (1) se transformará en el plano xy en una determinada curva. Análogamente, a las rectas V = constante del plano UV les corresponderán curvas del plano XY.




Parcelamos el dominio R' mediante rectas paralelas a los ejes coordenados U = constante, V = constante, en rectángulos elementales de lados $\Delta U_p$ y $\Delta V_k$. A cada uno de estos rectángulos ABCD de área $\Delta\omega' = \Delta U\ \Delta V$, les corresponderá en el plano XY un cuadrilátero no curvilíneo A'B'C'D' de área $\Delta\omega$.

La función f(x, y), mediante las ecuaciones (1), se transformará en la F(U.V), estando ambas relacionadas por:

$$F(U,V) = f[x(U,V), y(U,V)]$$

Las coordenadas de los vértices del cuadrilátero curvilíneo A'B'C'D' son:

$$\begin{array}{ll} x_{A'} = x(U_p, V_k) & y_{A'} = y(U_p, V_k) \\ x_{B'} = x(U_p+\Delta U, V_k) & y_{B'} = y(U_p+\Delta U, V_k) \\ x_{C'} = x(U_p+\Delta U, V_k+\Delta V) & y_{C'} = y(U_p+\Delta U, V_k+\Delta V) \\ x_{D'} = x(U_p, V_k+\Delta V) & y_{D'} = y(U_p, V_k+\Delta V) \end{array}$$

Quedándonos con los infinitésimos de primer orden, se podría escribir así:

$$\begin{array}{ll} x_{A'} = x(U_p . V_k) & y_{A'} = y(U_p, V_k) \\ x_{B'} = x(U_p, V_k) + \frac{\partial x}{\partial U}\Delta U & y_{B'} = y(U_p, V_k) + \frac{\partial y}{\partial U}\Delta U \\ x_{C'} = x(U_p . V_k) + \frac{\partial x}{\partial U}.\Delta U + \frac{\partial x}{\partial V}.\Delta V & y_{C'} = y(U_p, V_k) + \frac{\partial y}{\partial U}\Delta U + \frac{\partial y}{\partial V}\Delta V \\ x_{D'} = x(U_p . V_k) + \frac{\partial x}{\partial V}.\Delta V & y_{D'} = y(U_p, V_k) + \frac{\partial y}{\partial V}.\Delta V \end{array}$$

El área del cuadrilátero curvilíneo será equivalente al doble de la del triángulo A'B'C' y quedará desparticularizando:

$$\Delta\omega \simeq |(x_{C'}-x_{A'})(y_{C'}-y_{A'})-(x_{C'}-x_{B'})(y_{C'}-y_{A'})| =$$

$$= |(\frac{\partial x}{\partial U}\Delta U + \frac{\partial x}{\partial V}.\Delta V).\frac{\partial y}{\partial V}\Delta V - \frac{\partial x}{\partial V}.\Delta V(\frac{\partial y}{\partial U}\Delta U + \frac{\partial y}{\partial V}.\Delta V)| =$$

$$= |\frac{\partial x}{\partial U}.\frac{\partial y}{\partial V}.\Delta U\Delta V - \frac{\partial x}{\partial V}.\frac{\partial y}{\partial U}.\Delta U\Delta V| = \left\|\begin{matrix} \frac{\partial x}{\partial U} & \frac{\partial x}{\partial V} \\ \frac{\partial y}{\partial U} & \frac{\partial y}{\partial V} \end{matrix}\right\| \Delta U.\Delta V =$$

$$= \left|\frac{D(x,y)}{D(U,V)}\right| \Delta U.\Delta V \quad \text{ó sea:}$$

$$\Delta\omega \simeq \left|\frac{D(x,y)}{D(U.V)}\right| \Delta\omega'$$

La igualdad será válida cuando las particiones en R y R' sean tales que sus diámetros formen una sucesión nula, ó sea:

$$\left|\frac{D(x,y)}{D(U,V)}\right| = \lim \frac{\Delta\omega'}{\Delta\omega}$$ cuando el diámetro de $\Delta\omega \to 0$

La suma integral quedará transformada así:

$$\sum_{R} f(x,y)\Delta\omega \simeq \sum_{R'} F(U.V) \left|\frac{D(x,y)}{D(U.V)}\right| \Delta\omega'$$

tomando límites quedará:

$$\iint_{R} f(x,y)dxdy = \iint_{R'} f\,[x(U,V), y(U,V)]\left|\frac{D(x,y)}{D(U,V)}\right| dU.dV$$

Si hacemos el cambio a polares, $x = \varrho.\cos\vartheta$, $y = \varrho.\operatorname{sen}\vartheta$.

$$\frac{D(x,y)}{D(\varrho,\vartheta)} = \varrho$$ y quedará:

$$\iint_{R} f(x,y)dxdy = \iint_{R'} f\,[\varrho.\cos\vartheta,\ \varrho.\operatorname{sen}\vartheta].\ \varrho.d\varrho.d\vartheta$$

En paramétricas $x = a.\varrho.\cos\vartheta$, $y = b.\varrho.\operatorname{sen}\vartheta$.

$$\frac{D(x,y)}{D(\varrho,\vartheta)} = a.b.\varrho$$ y quedaría:

$$\iint_{R} f(x,y).dxdy = \iint_{R'} f(a.\varrho.\cos\vartheta,\ b.\varrho.\operatorname{sen}\vartheta).\ a.b.\varrho d\varrho.\ d\vartheta$$

Este último cambio se utiliza a veces cuando el dominio R es el formado por los puntos interiores a la elipse $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ en cuyo caso, al hacer el cambio anterior, $\vartheta$ variará de 0 a $2\pi$ y $\varrho$ de 0 a 1.

## 10.- Relación entre las funciones $\beta$ y $\Gamma$.-

Cuando se estudió la función $\beta$, se demostró la relación:

$$\beta(p,q) = \frac{\Gamma(p).\Gamma(q)}{\Gamma(p+q)}$$

sólo para valores de p y q enteros y positivos. Vamos a demostrar ahora la validez de dicha fórmula para cualquier valor positivo de ambos parámetros.

Previamente podemos comprobar que la integral doble de una función de la for ma $f(x)$, $\varphi(y)$, extendida a un dominio rectangular $a \leqslant x \leqslant b$, $c \leqslant y \leqslant d$, se puede descomponer en producto de dos integrales simples.

$$\iint_R f(x).\varphi(y).dxdy = \int_a^b dx \int_c^d f(x).\varphi(y).dy = [\int_a^b f(x)dx][\int_c^d \varphi(y)\ dy]$$

La demostración es trivial, teniendo en cuenta el cálculo de una integral doble en un dominio rectangular.

Recordemos la expresión de $\Gamma$ (con el cambio $x = y^2$)

$$\Gamma(p) = \int_0^\infty x^{p-1}.e^{-x}dx = 2\int_0^\infty x^{2p-1}.e^{-x^2}.dx$$

$$\Gamma(q) = \int_0^\infty x^{q-1}.e^{-x}dx = 2\int_0^\infty y^{2q-1}.e^{-y^2}.dy$$ multiplicando ambas igualdades.

$$\Gamma(p).\Gamma(q) = 4[\int_0^\infty x^{2p-1}.e^{-x^2}.dx][\int_0^\infty y^{2q-1}.e^{-y^2}.dy] =$$

$$= 4.\int_0^\infty dx\int_0^\infty x^{2p-1}.\ y^{2q-1}.\ e^{-(x^2+y^2)}.dy$$

por la propiedad anterior. En esta integral doble pasamos a polares

$x = \varrho.\cos\vartheta.$

$y = \varrho.\operatorname{sen}\vartheta.$

$$\frac{D(x,y)}{D(\varrho,\vartheta)} = \varrho$$ y queda

$$\Gamma(p).\Gamma(q) = 4\int_0^{\pi/2} d\vartheta\int_0^\infty \cos^{2p-1}\vartheta.\operatorname{sen}^{2q-1}\vartheta.\varrho^{2(p+q)-1}\ d\varrho$$

$$= 2[\int_0^{\pi/2} \cos^{2p-1}\vartheta.\operatorname{sen}^{2q-1}\vartheta.d\vartheta]\ 2[\int_0^\infty \varrho^{2(p+q)-1}.e^{-\varrho^2}d\varrho] =$$

$$= \beta(p.q).\Gamma(p+q)$$

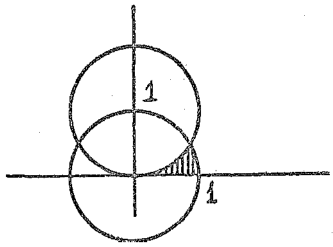
11.- Ejemplos.-

11.1.- Calcular la integral doble.

$$I = \iint_R \sqrt{x^2 + y^2}\ dxdy,$$ siendo R el dominio limitado por:

$$\left| \begin{array}{c} x^2 + y^2 - 2y \geqslant 0 \\ x^2 + y^2 - 1 \leqslant 0 \\ y \geqslant 0 \\ x \geqslant 0 \end{array} \right|$$

Pasamos a polares y el dominio R' correspondiente al R al hacer el cambio, en el plano ( $\varrho$, $\vartheta$ ), será:



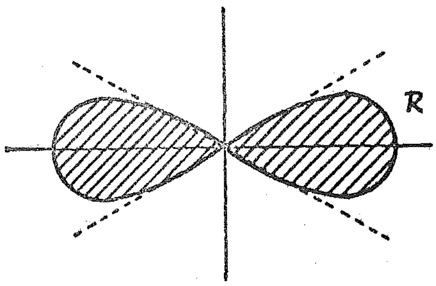

$$0 \leqslant \vartheta \leqslant \frac{\pi}{6};\ 2\ \mathrm{sen}\,\vartheta \leqslant \varrho \leqslant 1$$

$$I = \int_0^{\pi/6} d\vartheta \int_{2\mathrm{sen}\vartheta}^{1} \varrho^2 . d\varrho = \int_0^{\pi/6} \left| \frac{\varrho^3}{3} \right|_{2\mathrm{sen}\vartheta}^{1} d\vartheta = \frac{1}{3} \int_0^{\pi/6} (1 - 8\mathrm{sen}^3\vartheta)\ d\vartheta =$$

$$= \frac{1}{3}\left(\frac{\pi}{6} + 3\sqrt{3} - \frac{16}{3}\right)$$

11.2.- Mediante una integral doble calcular el volumen del cuerpo limitado por la superficie $x^2 - y^2 = 2az$, el cilindro: $(x^2+y^2)^2 = a^2(x^2-y^2)$ y el plano $z = 0$.

El volumen vendrá dado por: $$V = \iint_R \frac{x^2 - y^2}{2a}\ dxy$$




Pasando el cilindro a polares queda:

$$\varrho^4 = a^2 . \varrho^2 . \cos^2\omega\ ;\ \varrho = a\sqrt{\cos\omega}$$

$$V = \iint_{R'} \frac{\cos 2\omega}{2a} . \varrho^3 . d\omega . d\varrho = 4 \int_0^{\pi/4} \frac{\cos 2\omega}{2a}\ d\omega \int_0^{a\sqrt{\cos 2\omega}} \varrho^3\ .\ d\varrho =$$

$$= 4\int_0^{\pi/4} \frac{\cos 2\omega}{2a}\, d\omega \left[\frac{\rho^4}{4}\right]_0^{a\cdot\sqrt{\cos 2\omega}} = 4\int_0^{\pi/4} \frac{\cos 2\omega}{2a} \cdot \frac{a^4 . \cos^2 . 2\omega}{4} =$$

$$= 4\,\frac{a^3}{8}\int_0^{\pi/4} \cos^3 2\omega\, d\omega\ ,\ \text{haciendo } 2\omega = t,\ \text{queda:}$$

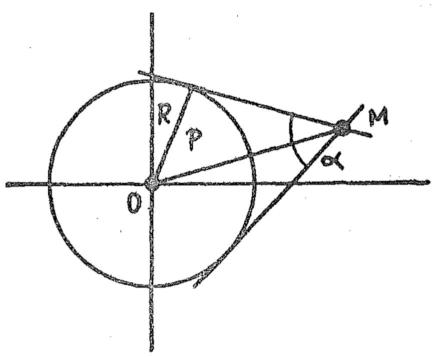
$$V = \frac{a^3}{4}\int_0^{\pi/2} \cos^3 t = \frac{a^3}{6}$$

11.3.- Por un punto M exterior a un círculo C de centro el origen y radio R, se trazan dos tangentes al círculo que forman entre sí un ángulo $\alpha$ . Calcular el valor de la integral doble

$$I = \iint_R (\alpha - \operatorname{sen}\alpha) . dx\, dy$$

siendo R el dominio exterior a todo el círculo.

Operando en coordenadas polares se tendrá:




$$OM = \rho = \frac{R}{\operatorname{sen}\frac{\alpha}{2}}\ ;\ \operatorname{sen}\alpha = 2\operatorname{sen}\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\alpha}{2} = \frac{2R}{\rho^2}\sqrt{\rho^2 - R^2}$$

$$\frac{\alpha}{2} = \operatorname{arc\,sen}\frac{R}{\rho}$$

$$I = \iint_R (\alpha - \operatorname{sen}\alpha) dxdy = \iint_{R'} \left(2 . \operatorname{arc\,sen}\frac{R}{\rho} - \frac{2R}{\rho^2}\sqrt{\rho^2 - R^2}\right) . \rho . d\rho . d\theta$$

$$= 2\int_R^{\infty} d\rho \int_0^{2\pi} \left(\rho . \operatorname{arc\,sen}\frac{R}{\rho} - \frac{R}{\rho}\sqrt{\rho^2 - R^2}\right) d\theta =$$

$$= 4\pi \int_R^{\infty} [Q \cdot \text{arc sen}\, \frac{R}{Q} - \frac{R}{Q} \sqrt{Q^2-R^2}\,]\, dQ = 4\pi\,(I_1 + I_2)$$

Para el primer sumando, integramos por partes:

$$I_1 = \int Q \cdot \text{arc sen}\, \frac{R}{Q}\, dQ = \frac{Q^2}{2} \cdot \text{arc sen}\, \frac{R}{Q} + \frac{R}{2} \int \frac{Q\, dQ}{\sqrt{Q^2 - R^2}} =$$

$$= \frac{Q^2}{2}\, \text{arc sen}\, \frac{R}{Q} + \frac{R}{2} \sqrt{Q^2-R^2}$$

Para el segundo sumando:

$$I_2 = R \int \frac{\sqrt{Q^2-R^2}}{Q}\, dQ = R\sqrt{Q^2-R^2} - R^2 \cdot \text{arctg}\, \frac{\sqrt{Q^2-R^2}}{R}\ , \text{ luego:}$$

$$I = 4\pi\, [\frac{Q^2}{2} \cdot \text{arc sen}\, \frac{R}{Q} - \frac{R}{2}\sqrt{Q^2-R^2} + R^2 \cdot \text{arctg}\, \frac{\sqrt{Q^2-R^2}}{R}\,]_R^{\infty}$$

teniendo en cuenta que $\lim\limits_{Q \to \infty} [\frac{Q^2}{2} \cdot \text{arc sen}\, \frac{R}{Q} - \frac{R}{2}\sqrt{Q^2-R^2} + R^2 \cdot \text{arctg}\, \frac{\sqrt{Q^2-R^2}}{R}] =$

$$= \lim_{Q \to \infty} [\cancel{\frac{Q^2}{2} \cdot \frac{R}{Q}} - \frac{R}{2}\, Q(\cancel{1} - \frac{1}{2} \cdot \frac{R^2}{Q^2}) + R^2 \cdot \frac{\pi}{2}] = \pi \frac{R^2}{2}\ , \text{ queda:}$$

$$I = 4\pi\, [\frac{\pi R^2}{2} - \frac{R^2}{2} \cdot \frac{\pi}{2}] = \pi^2 R^2$$

# 6

# Integral de superficie

# LECCION 6

## INTEGRAL DE SUPERFICIE

### 1.- Resumen de conocimientos anteriores.-

Recordemos las siguientes fórmulas de interés.

a) Recta tangente a una línea en el espacio de ecuaciones paramétricas

$x = x(t)$, $y = y(t)$, $z = z(t)$, en el punto $t = t_o$

la tangente será:

$$\frac{x-x(t_0)}{x'(t_0)} = \frac{y-y(t_0)}{y'(t_0)} = \frac{z-z(t_0)}{z'(t_0)}$$

b) Plano tangente a una superficie de ecuación $z = z(x,y)$, en el punto $(x_0, y_0, z_0)$ de ella.

$$z-z_0 = z'_{x_0}(x-x_0)+z'_{y_0}(y-y_0)$$

Si la superficie está dada en implícitas por la ecuación $F(x,y,z) = 0$ el plano tangente será:

$$F'_{x_0}(x-x_o) + F'_{y_0}(y-y_0) + F'_{z_0}(z-z_0) = 0$$

c) Recta normal a una superficie en el punto $(x_0, y_0, z_0)$ de la misma.

Si la superficie tiene por ecuación $z = z(x,y)$ la normal será:

$$\frac{x-x_0}{z'_{x_0}} = \frac{y-y_0}{z'_{y_0}} = \frac{z-z_0}{-1}$$

y los cosenos directores de la normal se calcularán estableciendo la proporcionalidad

$$\frac{\cos\alpha}{z'_{x_0}} = \frac{\cos\beta}{z'_{y_0}} = \frac{\cos\gamma}{-1} = \frac{1}{\pm\sqrt{1+z'^2_{x_0}+z'^2_{y_0}}}$$

Si la superficie tiene por ecuación $F(x,y,z) = 0$, la normal será:

$$\frac{x-x_0}{F'_{x_0}} = \frac{y-y_0}{F'_{y_0}} = \frac{z-z_0}{F'_{z_0}}$$

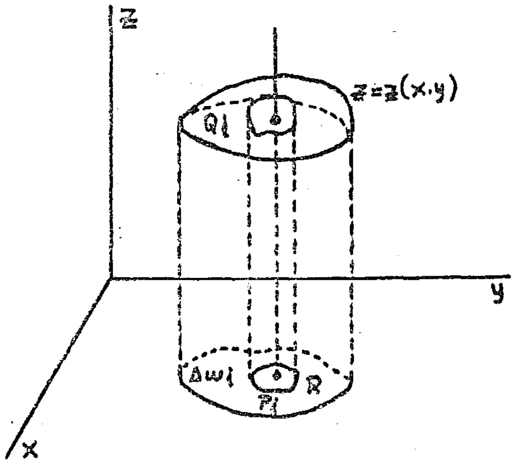
y sus cosenos directores se calcularán análogamente

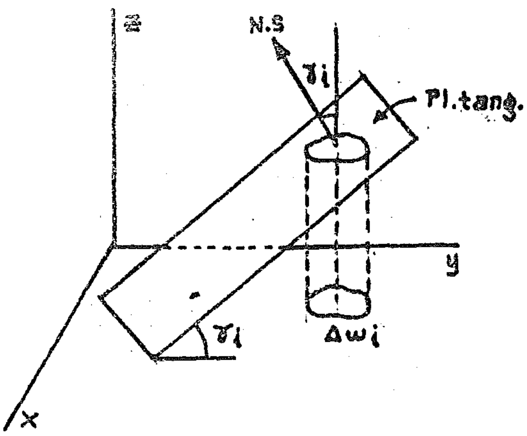
$$\frac{\cos\alpha}{F'_{x_0}} = \frac{\cos\beta}{F'_{y_0}} = \frac{\cos\gamma}{F'_{z_0}} = \frac{1}{\pm\sqrt{F'^2_{x_0}+F'^2_{y_0}+F'^2_{z_0}}}$$

2.- Area de una superficie.-

Para el concepto de área de una superifice, se podría pensar en definirlo como el límite del área de una superficie poliédrica inscrita en la superficie al tender a cero sus caras; sin embargo, al intervenir varias variables en dicho límite, pueden salir valores del límite distintos según como tiendan a cero las caras de dicha superficie, como demostró Schwarz para el caso de una superficie cilíndrica. Vamos pues a aplicar otra definición.

Así pues, supongamos que queremos calcular el área de la porción de superficie $\sigma$ definida por la función $z = f(x,y)$, uniforme, continua y con derivadas parciales continuas para los valores de $(x,y)$ pertenecientes al dominio R del plano xy donde se proyecta la porción de superficie $\sigma$ .



Parcelamos arbitrariamente el dominio R, en n parcelas elementales de áreas:

$$\Delta\omega_1, \quad \Delta\omega_2, \ldots, \quad \Delta\omega_i, \ldots, \quad \Delta\omega_n$$

Dentro de cada parcela de área $\Delta\omega_i$, elegimos un punto arbitrario $P_i(x_i, y_i)$, al que corresponderá el punto $Q_i\,[x_i, y_i, z(x_i, y_i)]$de la superficie.

En el punto $Q_i$, se traza el plano tangente a la superficie y se proyecta sobre él, en la dirección del eje z, la parcela de área $\Delta\omega_i$. Se tiene así pues sobre cada plano tangente una porción del mismo que llamaremos "escama" de la superficie y tendrá un área de valor $\Delta\sigma_i$. Por definición, se llama área de la porción de superficie considerada, al límite de la suma de las áreas de dichas escamas $\Delta\sigma_i$, cuando los diámetros de las parcelas $\Delta\omega_i$, formen una sucesión nula. O sea

$$\text{Area} = \sigma = \lim \Sigma \Delta\sigma_i$$

Si llamamos $\gamma_i$, al ángulo que forma el plano tangente en $Q_i$ con el plano $z = 0$, se tendrá que será el mismo que forman su normal y el eje OZ, ó sea es el de la normal a la superficie con el eje OZ que sabemos calcular

$$\frac{1}{\cos\gamma} = \sqrt{1+(z'_x)^2 + (z'_y)^2}$$

Por ser $\Delta\omega_i$ la proyección de $\Delta\sigma_i$, se tendrá

$$\Delta\omega_i = \Delta\sigma_i \cdot \cos\gamma_i$$

$$\Delta\sigma_i = \frac{\Delta\omega_i}{\cos\gamma_i}$$

$$\text{Area} = \sigma = \lim \Sigma \Delta\sigma_i = \lim \Sigma \frac{\Delta\omega_i}{\cos\gamma_i} = \iint_R \frac{dx\,dy}{\cos\gamma} =$$

$$= \iint_R \sqrt{1+(z'_x)^2+(z'_y)^2}\,.\,dxdy$$

Si la superficie considerada no fuera uniforme respecto de z, pero sí respecto de x ó y, podríamos deducir otras fórmulas similares proyectando sobre el plano yz, ó el xz respectivamente, y se podría escribir así:

$$\text{Area} = \iint_{R'} \sqrt{1+(x'_y)^2+(x'_z)^2}\; dydz$$

$$\text{Area} = \iint_{R''} \sqrt{1+(y'_x)^2 + (y'_z)^2}\; dxdz$$

siendo R' y R'' los dominios de los planos yz, ó xz donde se proyectaría la superficie.

2.1.- Area de una superficie en paramétricas.-

Si la superficie viene dada por sus ecuaciones paramétricas

$$x = x(U, V), \quad y = y(U, V), \quad z = z(U, V) \tag{1}$$

se puede reducir al problema anterior, efectuando en la integral doble obtenida el correspondiente cambio de variable y calculando previamente para los valores (1), la función subintegral.

$$A = \iint_{R} \sqrt{1+(z'_x)^2 + (z'_y)^2}\; dxdy$$

Diferenciando (1) queda:

$$\left.\begin{aligned} dx &= \frac{\partial x}{\partial U}\, dU + \frac{\partial x}{\partial V} dV \\ dy &= \frac{\partial y}{\partial U}\, dU + \frac{\partial y}{\partial V} dV \\ dz &= \frac{\partial z}{\partial U}\, dU + \frac{\partial z}{\partial V} dV \end{aligned}\right\}$$

Para calcular $\frac{\partial z}{\partial x}$, se supone y = cte,

$$dy = 0 = \frac{\partial y}{\partial U}\, dU + \frac{\partial y}{\partial V} dV; \quad \frac{dV}{dU} = - \frac{\partial y/\partial U}{\partial y/\partial V} \tag{2}$$

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \left(\frac{dz}{dx}\right)_{y=cte} = \frac{\frac{\partial z}{\partial U} dU + \frac{\partial z}{\partial V} dV}{\frac{\partial x}{\partial U} dU + \frac{\partial x}{\partial V} dV} = \frac{\frac{\partial z}{\partial U} + \frac{\partial z}{\partial V} \cdot \frac{dV}{dU}}{\frac{\partial x}{\partial U} + \frac{\partial x}{\partial V} \cdot \frac{dV}{dU}} \tag{3}$$

sustituyendo (2) en (3) queda:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\frac{\partial z}{\partial U} - \frac{\partial z}{\partial V} \cdot \frac{\partial y}{\partial U} / \frac{\partial y}{\partial V}}{\frac{\partial x}{\partial U} - \frac{\partial x}{\partial V} \cdot \frac{\partial y}{\partial U} / \frac{\partial y}{\partial V}} = \frac{\frac{\partial z}{\partial U} \cdot \frac{\partial y}{\partial V} - \frac{\partial z}{\partial V} \cdot \frac{\partial y}{\partial U}}{\frac{\partial x}{\partial U} \cdot \frac{\partial y}{\partial V} - \frac{\partial x}{\partial V} \cdot \frac{\partial y}{\partial U}} = \frac{D(z,y)/D(U,V)}{D(x,y)/D(U,V)} \qquad (4)$$

Del mismo modo obtendríamos:

$$\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{D(z,x)/D(U,V)}{D(x,y)/D(U,V)} \qquad (5)$$

Sustituyendo (4) y (5) en la integral doble, efectuando en ella el cambio de variable:

$$\left\{ \begin{array}{l} x = x(U.V) \\ y = y(U.V) \end{array} \right\} \quad \text{queda:}$$

$$\text{Area} = \iint_{R'} \sqrt{1 + \left[\frac{D(z,y)/D(U,V)}{D(x,y)/D(U,V)}\right]^2 + \left[\frac{D(z,x)/D(U,V)}{D(x,y)/D(U,V)}\right]^2} \cdot$$

$$\cdot \frac{D(x,y)}{D(U,V)} \cdot dU \cdot dV =$$

$$= \iint_{R'} \sqrt{\left[\frac{D(x,y)}{D(U,V)}\right]^2 + \left[\frac{D(y,z)}{D(U,V)}\right]^2 + \left[\frac{D(z,x)}{D(U,V)}\right]^2} \; dU \cdot dV \qquad (6)$$

siendo R' el dominio del plano UV correspondiente al R.

Efectuando operaciones en (6), podríamos también escribir la expresión del área de la siguiente forma:

$$A = \iint_{R'} \sqrt{E.G-F^2} \; . \; dU \; . \; dV$$

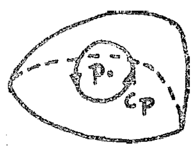
siendo:

$$\left\{ \begin{array}{l} E = \left(\frac{\partial x}{\partial U}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial U}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial U}\right)^2 \\ G = \left(\frac{\partial x}{\partial V}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial V}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial V}\right)^2 \\ F = \frac{\partial x}{\partial U} \cdot \frac{\partial x}{\partial V} + \frac{\partial y}{\partial U} \cdot \frac{\partial y}{\partial V} + \frac{\partial z}{\partial U} \cdot \frac{\partial z}{\partial V} \end{array} \right.$$

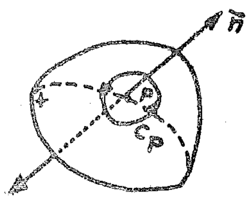
3.- Concepto de integral de superficie.-

Hagamos en primer lugar unas consideraciones intuitivas acerca de la "orientación" de superficies.

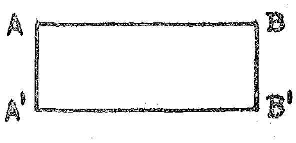
Consideremos un casquete de superficie. En un punto P de ella podemos fijar un sentido de rotación mediante un pequeño ciclo orientado $C_p$ que rodee al punto P. Si ese pequeño ciclo lo movemos de manera continua sobre la superficie, se puede asociar a cada punto de la misma un sentido de rotación, si ocurre que no pueda llegarse a ningún punto Q con un ciclo y con su opuesto. En tal caso la superficie se dice orientable.




Para cada superficie orientable se puede hablar de sus dos caras, asociadas con las dos seminormales en cada punto. Fijada la orientación del ciclo $C_p$, consideremos la seminormal que contiene el vector $\vec{n}$ desde cuyo extremo se vea recorrer el ciclo $C_p$, dejando su interior a la izquierda. Diremos que la cara asociada a ese vector $\vec{n}$ es la cara positiva, mientras que la cara asociada a la otra seminormal es la cara negativa.




No todas las superficies son orientables ó de dos caras. El ejemplo más sencillo de superficie no orientable o de una sola cara es el de la banda de Moebius, que puede construirse con una tira de papel rectangular como la de la figura, uniendo el punto A con B' y el B con A'.

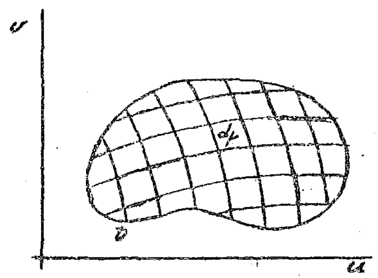



Conviene advertir que si bien en el espacio euclídeo $E_3$, coinciden los conceptos de "orientabilidad" y "bilateralidad" de superficies no ocurre lo mism en otros espacios, donde pueden existir superficies orientables, pero que tengan una sola cara. El estudio profundo de estas cuestiones se hace en Topología.

El concepto de integral de superficie que vamos a establecer, se entenderá referido a la cara positiva de una superficie de dos hojas.

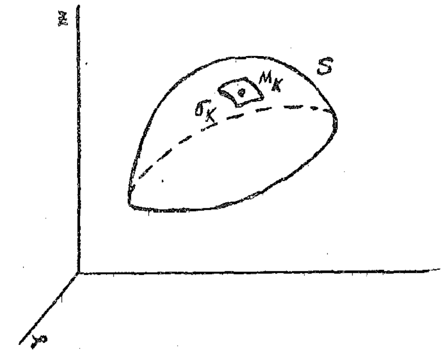
Consideremos un casquete S de superficie, que tenga área, definido en forma paramétrica por las ecuaciones:

$$\begin{cases} x = x(u, v) \\ y = y(u, v) \\ z = z(u, v) \end{cases} \tag{1}$$




donde los segundos miembros son funciones continuas y con derivadas parciales continuas en el dominio D, de modo que cuando el punto de coordenadas (u, v) describe el dominio D, se obtiene el casquete S.

Si se descompone el casquete S en porciones más pequeñas, eso equivaldrá a descomponer el dominio D, en las partes homólogas. Sean $\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_n$ las áreas de las porciones de S.




Consideremos una función f(x, y, z) continua en los puntos de S; resultará ser, también, una función continua del punto (u, v) de D.

Sea $M_k$ un punto tomado arbitrariamente en la porción $\sigma_k$. Formemos la suma:

$$\sum_{1}^{n} f(M_k) \cdot \sigma_k \quad \text{que puede escribirse} \tag{2}$$

$$\sum_{1}^{n} f(M_k) \cdot \iint_{d_k} \sqrt{A^2 + B^2 + C^2}\, du\, dv \qquad (3)$$

donde

$$A = \frac{\partial (x, y)}{\partial (u, v)} \quad , , \quad B = \frac{\partial (y, z)}{\partial (u, v)} \quad , , \quad C = \frac{\partial (z, x)}{\partial (u, v)}$$

Por el teorema de la media, la integral doble que aparece en (3) es - igual a $F(u'_k, v'_k)\,\omega_k$ donde $\omega_k$ es el área de la parcela $d_k$, y F es el integrando; $(u'_k, v'_k)$ es un punto de $d_k$. Luego (3) puede ponerse:

$$\sum_{1}^{n} f(u_k, v_k) \cdot F(u'_k, v'_k) \cdot \omega_k \qquad (4)$$

Si fuera $u'_k = u_k$, $v'_k = v_k$ la suma (4) tendría límite al tender a cero el mayor de los diámetros de las parcelas $d_k$, límite que valdría

$$\iint_{D} f(u, v) \cdot F(u, v) \cdot du\, dv \qquad (5)$$

Vamos a ver que, en todo caso, la suma (4) tiene como límite (5). En efecto sea $M'_k$ el punto de S que corresponde al punto $(u'_k, v'_k)$ de la parcela $d_k$; es claro que $M'_k$ pertenece junto con $M_k$ a la porción de S de área $\sigma_k$. La diferencia

$$\sum_{1}^{n} f(M_k)\,\sigma_k - \sum_{1}^{n} f(M'_k)\,\sigma_k = \sum_{1}^{n} \left[ f(M_k) - f(M'_k) \right] \sigma_k$$

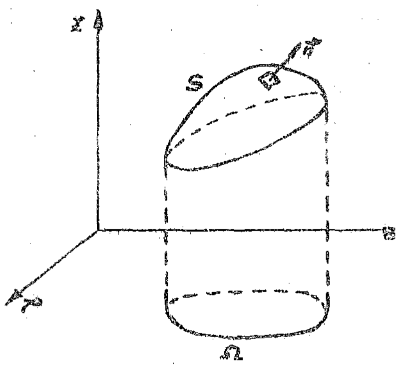
tiende hacia cero cuando las áreas $\sigma_k$ tienden hacia cero, ya que en virtud de la continuidad uniforme de la función f, se cumple $|f(M_k) - f(M'_k)| < \varepsilon$ en cuanto los números $\sigma_k$ sean suficientemente pequeños.

El límite de la suma (2) existe, por lo tanto, en las condiciones indicadas y está dado por la integral (5). Dicho límite se llama "integral de la función f(x, y, z) sobre la superficie S", ó más brevemente "integral de superficie", y se la designa con la notación $\iint_S f(x, y, z) \cdot d\sigma$ .

Aplicación práctica. -

El cálculo efectivo de las integrales de superficie, no siempre se hace utilizando unas coordenadas curvilíneas cualesquiera, sino que es frecuente emplear las propias coordenadas cartesianas.

Así por ejemplo, para calcular $\iint_S f(x,y,z).d\sigma$ extendida a la cara señalada con la seminormal $\vec{n}$, proyectemos el casquete S sobre el plano coordenado x'y, obteniéndose el dominio $\Omega$. Si la superficie S viene definida por la función uniforme $z = \varphi(x,y)$, la integral (5) se escribe ahora




$$\iint_{\Omega} f\,[x, y, \varphi(x,y)]\,.\,\frac{dx\ dy}{\cos\gamma} \tag{6}$$

ya que se ha considerado la representación paramétrica

$$\begin{cases} x = x \\ y = y \\ z = \varphi(x,y) \end{cases}$$

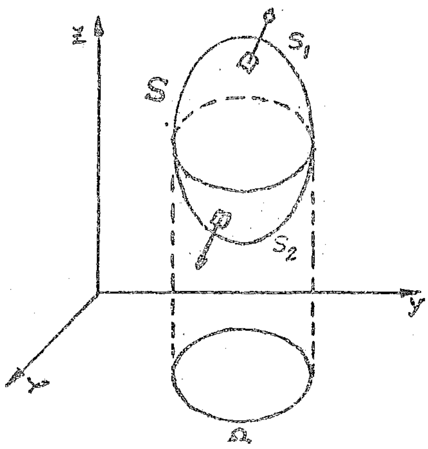
equivalente a tomar como parámetros $\underline{u}$, $\underline{v}$ las coordenadas cartesianas $\underline{x}$, $\underline{y}$. (recuérdese la expresión del elemento de área en coordenadas curvilíneas).

Prácticamente lo que hemos hecho es sustituir $\underline{z}$ por la coordenada $\underline{z}$ de la superficie y $d\sigma$ por $dx\ dy/\cos\gamma$.

Será conveniente, sin embargo, hacer algunas precisiones acerca del signo de $\cos\gamma$ en los diversos casos que pueden presentarse.

a). Sea el caso de la integral de superficie $\iint_S f(x,y,z)d\sigma$ donde S es una superficie cerrada, que se puede descomponer en la porción $S_1$ cuya ecuación es $z = \varphi_1(x,y)$ y la porción $S_2$ cuya ecuación es $z = \varphi_2(x,y)$. Es claro que $\iint_S =$

$$= \iint_{-1} + \iint_{S_2}.$$




Pero según (6),

$$\iint_{S_1} = \iint_{\Omega} f\,[x, y, \varphi_1(x, y)]\ \frac{dx\ dy}{\cos\gamma}$$

donde $\cos\gamma$ es positivo.

En cambio sobre la porción $S_2$, $\cos\gamma$ es negativo; por ello se habrá de sustituir $d\sigma$ por la expresión $-\dfrac{dxdy}{\cos\gamma}$ ; el signo - se pone para compensar el signo - de $\cos\gamma$ . Por ello resulta, en resumen,

$$\iint_{S} = \iint_{\Omega} f\,[x, y, \varphi_1(x, y)].\ \frac{dx\ dy}{\cos\gamma} -$$

$$- \iint_{\Omega} f\,[x, y, \varphi_2(x, y)].\ \frac{dx\ dy}{\cos\gamma} \tag{7}$$

entendiéndose que el $\cos\gamma$ del minuendo se refiere a la superficie $S_1$, y el $\cos\gamma$ del sustraendo se refiere a $S_2$.

b) Consideremos ahora el caso de la integral de superficie $\iint_S f(x, y, z)$. . $dx\ dy$ donde S es la misma superficie del caso a).

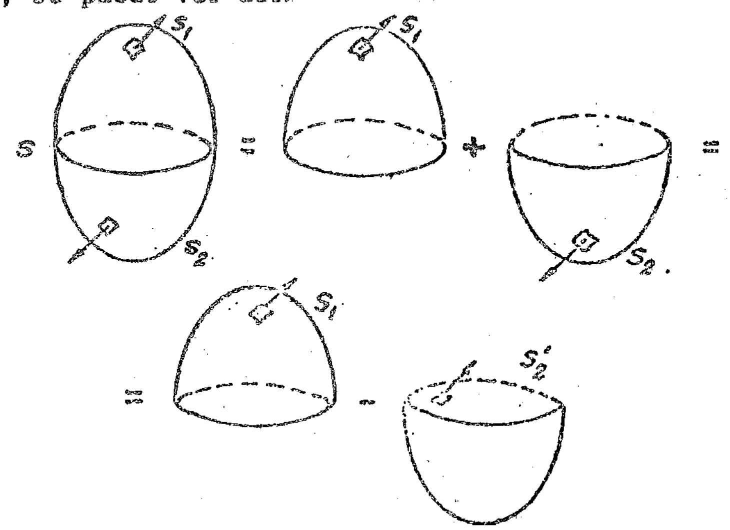
El significado de esta integral es el de $\iint_S f(x, y, z) . \cos\gamma\ . d\sigma$ que, según lo dicho en el caso a) se debe calcular por la fórmula (7), resultando:

$$\iint_{S} = \iint_{\Omega} f\,[x, y, \varphi_1(x, y)]\cos\gamma .\ \frac{dx\ dy}{\cos\gamma} -$$

$$- \iint_{\Omega} f\,[x, y, \varphi_2(x, y)]\ \cos\gamma\ .\ \frac{dx\ dy}{\cos\gamma} = \tag{8}$$

$$= \iint_{\Omega} f\,[x, y, \varphi_1(x, y)]\; dx\; dy - \iint_{\Omega} f\,[x, y, \varphi_2(x, y)]\; dx\; dy \qquad (8)$$

Gráficamente, se puede ver así:




donde hemos llamado $S'_2$ a la cara "interior" del casquete cuya cara "exterior" es $S_2$. En símbolos

$$\iint_S = \iint_{S_1} + \iint_{S_2} = \iint_{S_1} - \iint_{S'_2} =$$

$$= \iint_{\Omega} f\,[x, y, \varphi_1(x, y)].\; dx\; dy - \iint_{\Omega} \varphi[x, y, \varphi_2(x, y)].\; dx\; dy$$

EJEMPLO:

Calcular $\iint_S \frac{dx\; dy}{z}$ extendida a la cara exterior de la superficie esférica $x^2+y^2+z^2 = r^2$.

Según la fórmula (8) se tendrá:

$$I = \iint_{\Omega} \frac{dx\; dy}{\sqrt{r^2-x^2-y^2}} - \iint_{\Omega} \frac{dx\; dy}{-\sqrt{r^2-x^2-y^2}} =$$

$$= 2\iint_{\Omega} \frac{dx\; dy}{\sqrt{r^2-x^2-y^2}}$$

donde $\Omega$ es el círculo $x^2 + y^2 = r^2$ del plano OXY.

Pasando a coordenadas polares resulta:

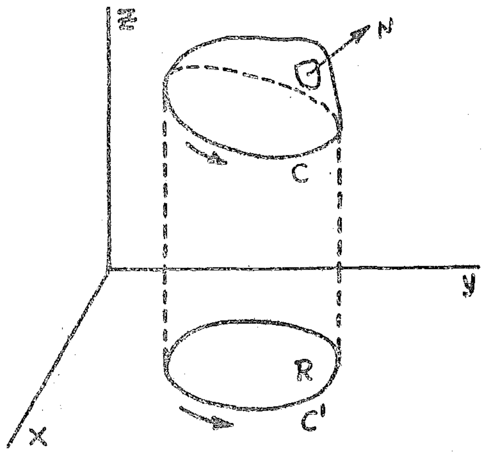
$$I = 2 \iint_{\Omega} \frac{\rho\, d\rho\, d\omega}{\sqrt{r^2 - \rho^2}} = 2 \int_0^{2\pi} d\omega \int_0^r \frac{\rho}{\sqrt{r^2 - \rho^2}} = 2.2\pi.\left(-\sqrt{r^2 - \rho^2}\right)_0^r = 4\pi r$$

4.- Teorema de Stokes.-

Consideremos la superficie uniforme $z = z(x, y)$, orientable, y un casquete de ella de área $\sigma$ que está limitado por una línea C que se proyecta sobre el plano xy según otra línea C' sin puntos múltiples.

Supongamos que todos los puntos del casquete de área $\sigma$ pertenecen a un cierto dominio espacial V, en el que se ha definido una función $X(x, y, z)$ continua y con derivadas parciales continuas. Vamos a calcular la siguiente integral curvilínea a lo largo de la línea C,

$$\int_C X(x, y, z)dx$$




Los puntos de la línea C, verifican $z = z(x, y)$, siendo $(x, y)$ puntos pertenecientes a la línea C' proyección de C sobre xy, luego:

$$\int_C X(x, y, z)dx = \int_{C'} X[x, y, z(x, y)]\, dx$$

Aplicando el teorema de Riemann quedará:

$$\int_{C'} X[x, y, z(x, y)]\, dx = - \iint_R \left(\frac{\partial X}{\partial y} + \frac{\partial X}{\partial z} \cdot \frac{\partial z}{\partial y}\right). dxdy$$

Entendiendo que la integral curvilínea a lo largo de C' está recorrida en el sentido en que deje al dominio R a su izquierda para un observador situado según el eje +OZ, y por ello se ha de recorrer C en un sentido tal que deje a la izquierda la cara superior para un observador situado según la seminormal a dicha cara.

Por otro lado, en función de la superficie $z = z(x, y)$, sabemos que $d\sigma = \frac{dxdy}{\cos\gamma}$, y, $\frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{\cos\beta}{\cos\gamma}$, sustituyendo en la integral quedará,

$$\int_C X(x,y,z)dx = -\iint_\sigma \left(\frac{\partial X}{\partial y} - \frac{\partial X}{\partial z}\cdot\frac{\cos\beta}{\cos\gamma}\right).\ \cos\gamma\ .\ d\sigma = \iint_\sigma \left(\frac{\partial X}{\partial z}.\cos\beta - \frac{\partial X}{\partial y}.\cos\gamma\right).\ d\sigma \qquad (1)$$

Si consideramos otras dos funciones $Y(x, y, z)$, $Z(x, y, z)$ que cumplan las mismas condiciones exigidas anteriormente para $X(x, y, z)$, se podrá poner permutando simplemente las ternas $(x, y, z)$ y $(X, Y, Z)$, las fórmulas:

$$\int_C Y(x,y,z).dy = \iint_\sigma \left(\frac{\partial Y}{\partial x}\cos\gamma - \frac{\partial Y}{\partial z}\cos\alpha\right).d\sigma \qquad (2)$$

$$\int_C Z(x,y,z)dz = \iint_\sigma \left(\frac{\partial Z}{\partial y}\cos\alpha - \frac{\partial Z}{\partial x}.\cos\beta\right).d\sigma \qquad (3)$$

Sumando (1), (2) y (3) quedará:

$$\int_C X(x,y,z)dx + Y(x,y,z)dy + Z(x,y,z)dz =$$

$$= \iint_\sigma \left[\left(\frac{\partial Z}{\partial y} - \frac{\partial Y}{\partial z}\right).\cos\alpha + \left(\frac{\partial X}{\partial z} - \frac{\partial Z}{\partial x}\right)\cos\beta + \left(\frac{\partial Y}{\partial x} - \frac{\partial X}{\partial y}\right)\cos\gamma\right].d\sigma =$$

$$= \iint_\sigma \left(\frac{\partial Z}{\partial y} - \frac{\partial Y}{\partial z}\right)dydz + \left(\frac{\partial X}{\partial z} - \frac{\partial Z}{\partial x}\right)dxdz + \left(\frac{\partial Y}{\partial x} - \frac{\partial X}{\partial y}\right)dxdy$$

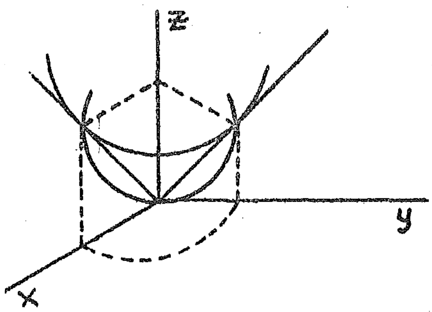
Esta es pues la fórmula debida a Stokes y permite transformar la integral curvilínea de una función extendida a una curva cerrada C en la integral de superficie extendida al casquete $\sigma$ cuyo contorno es C.

Se ve nuevamente que la condición para que la integral curvilínea a lo largo de una línea cerrada sea nula es que sean iguales las derivadas cruzadas,

$$\frac{\partial Y}{\partial x} = \frac{\partial X}{\partial y},\quad \frac{\partial X}{\partial z} = \frac{\partial Z}{\partial x},\quad \frac{\partial Y}{\partial z} = \frac{\partial Z}{\partial y}$$

## 5. EJEMPLOS

5.1.- Hallar el área de la superficie del paraboloide $2z = x^2 + y^2$, que es exterior al cono $z = \sqrt{x^2 + y^2}$.




la intersección de ambas superficies nos da las líneas,

$$z^2 = 2z \quad \begin{cases} z = 0 \\ z = 2 \end{cases}$$

Para $z = 2$, la línea es:

$$\left\{ \begin{array}{r} x^2 + y^2 = 4 \\ z = 2 \end{array} \right\}$$

En la superficie $2z = x^2 + y^2$, $z'x = x$, $z'y = y$

$$A = \iint_S \sqrt{1 + z'x^2 + z'y^2}\,.dx.dy = 4 \iint_R \sqrt{1 + x^2 + y^2}\,.\,dxdy,$$ pasando a polares $x = \varrho\cos\vartheta$, $y = \varrho\,\mathrm{sen}\,\vartheta$, $J = \varrho$.

$$A = 4 \iint_{R'} \sqrt{1+\varrho^2}\,.\,\varrho.d\,\varrho.d\vartheta = 4 \int_0^{\pi/2} d\vartheta \left| \frac{(1+\varrho^2)^{3/2}}{\frac{3}{2}.2} \right|_0^2 =$$

$$= \frac{2\pi}{3}(5\sqrt{5} - 1)$$

5.2.- Calcular la integral de superficie $\iint_S xy.d\sigma$, extendida a la parte de esfera $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$, en la que $x > 0$, $y > 0$, $z > 0$.

En esféricas, la esfera tiene de ecuaciones $\begin{cases} x = R\,\mathrm{sen}\,\theta\cos\varphi \\ y = R\,\mathrm{sen}\,\theta\,\mathrm{sen}\,\varphi \\ z = R\cos\varphi \end{cases}$

$$d\sigma = \frac{dxdy}{\cos\gamma} = \sqrt{1+z'^2_x + z'^2_y}\, dxdy = \frac{R}{z}\, dxdy$$

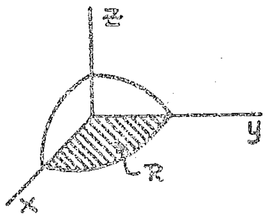
$$I = \iint_S xy\, d\sigma = \iint_S \frac{xy}{z}\, dxdy = R \iint_{R'} \frac{R^2 \operatorname{sen}\vartheta \cos\varphi \,.\, \operatorname{sen}\vartheta \operatorname{sen}\varphi}{R\cos\varphi} \,.\, R^2 \operatorname{sen}\vartheta\cos\vartheta \,.\, d\varphi d\vartheta =$$

$$= R^4 \int_0^{\pi/2} \operatorname{sen}^3\vartheta\, d\vartheta \int_0^{\pi/2} \operatorname{sen}\varphi \,.\, \cos\varphi\, d\varphi = \frac{R^4}{3}$$

5.3.- Calcular la integral de superficie

$$\iint_S \frac{d\sigma}{\sqrt{\frac{x^2}{a^4} + \frac{y^2}{b^4} + \frac{z^2}{c^4}}}$$

extendida a la superficie del primer octante del elipsoide $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$




En el elipsoide se tiene:

$$\left\{\begin{array}{l} \frac{x}{a^2} + \frac{zz'_x}{c^2} = 0 \\ \\ \frac{y}{b^2} + \frac{zz'_y}{c^2} = 0 \end{array}\right\} \quad \begin{array}{l} z'_x = -\frac{c^2}{a^2} \cdot \frac{x}{z} \\ \\ z'_y = -\frac{c^2}{b^2} \cdot \frac{y}{z} \end{array}$$

$$d\sigma = \sqrt{1+z'^2_x+z'^2_y}\, dx\, dy = \sqrt{1+\frac{c^4}{a^4}\frac{x^2}{z^2}+\frac{c^4}{b^4}\frac{y^2}{z^2}}\, dx\, dy =$$

$$= \frac{c^2}{z}\sqrt{\frac{x^2}{a^4}+\frac{y^2}{b^4}+\frac{z^2}{c^4}}\, dxdy$$

$$I = \iint_S \frac{d\sigma}{\sqrt{\frac{x^2}{a^4}+\frac{y^2}{b^4}+\frac{z^2}{c^4}}} = \iint_R \frac{c^2}{c\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}}} \frac{\sqrt{\frac{x^2}{a^4}+\frac{y^2}{b^4}+\frac{z^2}{c^4}}}{\sqrt{\frac{x^2}{a^4}+\frac{y^2}{b^4}+\frac{z^2}{c^4}}}\, dx\, dy =$$

$$= C. \iint_R \frac{dx\ dy}{\sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}}}$$

pasando a paramétricas:

$$\left\{ \begin{array}{l} x' = a.\ \rho . \cos \theta \\ y = b.\ \rho \operatorname{sen} \theta \end{array} \right\}$$

$$I = C \iint_{R'} \frac{ab \rho\ . d\rho\ . d\theta}{\sqrt{1 - \rho^2}} = abc \int_0^{\pi/2} d\theta \int_0^1 \frac{\rho d\rho}{\sqrt{1 - p^2}} = \frac{\pi abc}{2}$$

5.4.- Sea S una porción de superficie orientada limitada por una curva cerrada C, se pide:

1º.- Transformar en integral curvilínea la integral de supérficie:

$$I = \iint_S [x(z^2 - y^2)\cos\alpha + y(x^2 - z^2)\cos\beta + z(y^2 - x^2)\cos\gamma]\ .\ dS$$

2º.- Calcular I cuando S es la porción del plano $x = 1$, definida por $y^2 + z^2 \leqslant 1$, $y + z \geqslant 0$, $z - y \geqslant 0$.

$$\int_C Xdx + Ydy + Zdz = \iint_S \left(\frac{\partial Z}{\partial y} - \frac{\partial Y}{\partial z}\right) dy\ dz + \left(\frac{\partial X}{\partial z} - \frac{\partial Z}{\partial x}\right) dx dz + \left(\frac{\partial Y}{\partial x} - \frac{\partial X}{\partial y}\right) dx\ dy$$

en nuestro caso:

$$\left. \begin{array}{l} \frac{\partial Z}{\partial y} - \frac{\partial Y}{\partial z} = xz^2 - xy^2 \\ \frac{\partial X}{\partial z} - \frac{\partial Z}{\partial x} = yx^2 - yz^2 \\ \frac{\partial Y}{\partial x} - \frac{\partial X}{\partial y} = zy^2 - zx^2 \end{array} \right\} \begin{array}{c} \text{pode-} \\ \text{mos hacer} \end{array} \left\{ \begin{array}{ll} \frac{\partial Z}{\partial y} = xz^2, & \frac{\partial Y}{\partial z} = xy^2 \\ \frac{\partial X}{\partial z} = yx^2, & \frac{\partial Z}{\partial x} = yz^2 \\ \frac{\partial Y}{\partial x} = zy^2, & \frac{\partial X}{\partial y} = zx^2 \end{array} \right\}$$

ó sea $\left\{ \begin{array}{l} X = x^2 yz \\ Y = y^2\ xz \\ Z = z^2\ xy \end{array} \right\}$ y la integral de superficie quedará así

$$I = \int_C xyz\ (xdx + ydy + zdz)$$

Para la segunda parte, en el círculo del plano

$$x = 1 \quad \begin{cases} \alpha = 1 \\ \beta = 0 \\ \gamma = 0 \end{cases}$$

y la integral de superficie quedará:

$$I = \iint_S (z^2 - y^2).dS \qquad \begin{Bmatrix} y = \rho \cos \vartheta \\ z = \rho \operatorname{sen} \vartheta \end{Bmatrix}$$

$$I = \iint_{R'} \rho^2(\operatorname{sen}^2 \vartheta - \cos^2 \vartheta).\ \rho . d\rho . d\vartheta =$$

$$= \int_0^1 \rho^3 . d\rho \int_{\pi/4}^{3\pi/4} (-\cos 2\vartheta)d\vartheta = \frac{1}{4}$$

Podríamos haber calculado esta última integral utilizando la **curvilínea** deducida anteriormente y así quedaría:

$$I = \int_C = \int_{C_{(\text{círculo})}} + \int_{C_{(y=z)}} + \int_{C_{(y=-z)}} = I_1 + I_2 + I_3$$

sobre el círculo:

$$I_1 = \int_{C_1} xyz(xdx + ydy + zdz) = \int_{C_1} xyz . \frac{d\rho^2}{2}, \text{ siendo } \rho^2 = x^2+y^2+z^2$$

como $\rho$ = cte. $d\rho^2 = 0$ e $I_1 = 0$.

Sobre el segmento de $y = z$.

$$I_2 = \int_{C_2} 2y^3dy = \int_0^{1/\sqrt{2}} 2y^3dy = \frac{1}{8}$$

Sobre el segmento de $y = -z$

$$I_3 = \int_{C_3} - 2\ y^3dy = - \int_{-\frac{1}{\sqrt{2}}}^{0} (2y^3)dy = \frac{1}{8}$$

$$I = \frac{1}{8} + \frac{1}{8} = \frac{1}{4}$$

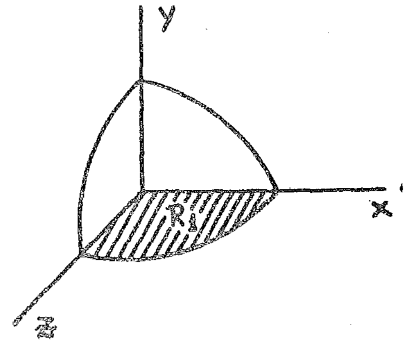
5.5.- Calcular la integral de superficie

$$I = \iint_S \frac{xz^2 dxdy + x^2 ydxdz + yzdydz}{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}}$$

extendida a la superficie esférica $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$.

como $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$ en la esfera, se tendrá:

$$I = \frac{1}{R^3} \iint_S xz^2 \, dx\,dy + \frac{1}{R^3} \iint_S x^2 ydxdz + \frac{1}{R^3} \iint_S yzdydz$$




la primera y la última se anulan en toda la superficie, mientras que la segunda se duplica en la semiesfera superior; la transformamos en doble en el primer octante:

$$I = \frac{2}{R^3} \iint_{S_1} x^2 ydxdz = \frac{8}{R^3} \iint_{R_1} x^2 . \sqrt{R^2-x^2-z^2} \, dx \, dz$$

pasando a polares

$$\left\{ \begin{array}{l} x = R . Q . \cos\vartheta \\ z = R . Q . \operatorname{sen}\vartheta \end{array} \right\} \quad J = R^2 . Q$$

$$I = \frac{8}{R^3} \int_0^{\pi/2} d\vartheta \int_0^1 R^2 Q^2 . \cos^2\vartheta \quad \sqrt{R^2(1-Q^2) . R^2} . Q . dQ =$$

$$= 8R^2 \int_0^{\pi/2} \cos^2\vartheta \, d\vartheta \int_0^1 Q^3 \sqrt{1-Q^2} . dQ = \frac{4\pi R^2}{15}$$

# 7

# Integrales Triples

## LECCION 7

## INTEGRALES TRIPLES

### 1.- Concepto de integral triple.-

Al estudiar la integral doble en la lección 5, ya se indicó la posible generalización del concepto de integral de Riemann para una región n-dimensional y se desarrolló para $n = 2$, obteniéndose así la integral doble.

De manera análoga, para $n = 3$ se obtendrá la integral triple, que podemos definir como a continuación se expone.

Consideremos la función $U = f(x, y, z)$, definida y acotada en todos los puntos de un cierto dominio espacial V, limitado por una superficie cerrada S.

Dividimos arbitrariamente el dominio V en dominios parciales que llamaremos celdas, representando dichos dominios, así como sus volúmenes por:

$$\Delta V_1, \quad \Delta V_2, \quad \dots , \quad \Delta V_k, \quad \dots , \quad \Delta V_m$$

En cada uno de estas celdas, elegimos un punto arbitrario $p_k \in \Delta V_k$, y formamos la suma de los valores de la función f en cada uno de esos puntos, por el volumen de la celda considerada, llamando a esta expresión "suma integral":

$$\sum_{k=1}^{m} f(p_k)\, \Delta V_k = f(p_1).\ \Delta V_1 + f(p_2).\ \Delta V_2 + \dots +$$

$$+ f(p_m).\ \Delta V_m = S_{m_1}$$

Volvemos a dividir el dominio V, y consideramos el conjunto formado por las divisiones antiguas y las nuevas, obteniéndose m' celdas ($m' \geqslant m$), y otra nueva suma integral:

$$\sum_{k=1}^{m'} f(p'_k).\ \Delta V'_k = S_{m_2}$$

Repetimos n veces este proceso, exigiendo que el volumen de cada celda tienda a cero, cuando $n \to \infty$, obteniéndose una sucesión de sumas integrales:

$$S_{m_1}, \ S_{m_2}, \ \dots , \ S_{m_n}, \ \dots$$

Decimos que existe la integral triple según Riemann de $f(x, y, z)$ en V y la representamos por L, si dado un número $\varepsilon > 0$ y arbitrario, se puede encontrar un valor p, tal que para $n \geqslant p$ se tenga $|S_{m_n} - L| < \varepsilon$, cualquiera que sean los puntos $p_k$ elegidos en cada celda.

Este límite se llama integral triple de la función $f(x, y, z)$ extendida al dominio V y se representa así:

$$L = \iiint_V f(p) . dV = \iiint_V f(x, y, z) dxdydz = \lim_{n \to \infty} \sum_{k=1}^{n} f(p_k) . \Delta V_k$$

Si llamamos $M_k$ y $m_k$ a los extremos superior e inferior de la función $f(x, y, z)$ en cada celda $\Delta V_k$, y formamos las sumas:

$$\sum_{k=1}^{n} M_k . \Delta V_k = M_1 . \Delta V_1 + \dots + M_n . \Delta V_n = S_n$$

$$\sum_{k=1}^{n} m_k . \Delta V_k = m_1 . \Delta V_1 + \dots + m_n . \Delta V_n = s_n$$

como $m_k \leqslant f(p_k) \leqslant M_k$, se tendrá:

$$\sum m_k . \Delta V_k \leqslant \sum f(p_k) . \Delta V_k \leqslant \sum M_k . \Delta V_k$$

$$s_n \leqslant S_{m_n} \leqslant S_n \quad ; \quad n = 1, 2, \dots, p, \dots, n, \dots$$

Si las sucesiones así formadas $s_n$ y $S_n$, cumplen la condición de que dado un $\varepsilon > 0$ y arbitrario, se puede encontrar un valor p, tal que para $n \geqslant p$, se verifique $|S_n - s_n| < \varepsilon$, tendrán ambas igual límite que coincidirá con el de la sucesión $S_{m_n}$ y se tendrá pues:

$$s_n < \iiint_V f(x, y, z) . dV < S_n$$

$$\lim_{\to \infty} s_n = \lim_{\to \infty} S_n = \lim_{\to \infty} \sum_{1}^{n} f(p_k) . \Delta V_k = \iiint_V f(x, y, z) . dV$$

Puede observarse que este concepto es idéntico al de integral doble, sustituyendo dominio plano R por dominio espacial V, parcela por celda, área por volumen e integral doble por integral triple.

Del mismo modo que en la doble podríamos demostrar que si la función $f(x,y,z)$ es continua en el dominio V es integrable en él. Asimismo $f(x,y,z)$ es también integrable si es acotada con puntos de discontinuidad aislados ó situados en curvas o superficies que pueden encerrarse en dominios de volumen tan pequeño como se quiera.

2.- Propiedades de la integral triple.-

Son las mismas que las de las dobles y que podremos resumir a continuación, omitiendo la demostración que sería idéntica a la que se realizó en las dobles:

a) Propiedad aditiva del integrando:

$$\iiint_V [\varphi_1(x,y,z) + \varphi_2(x,y,z) + \dots + \varphi_p(x,y,z)]\, dV =$$

$$= \iiint_V \varphi_1(x,y,z)dV + \dots + \iiint_V \varphi_p(x,y,z).dV$$

b) Linealidad:

$$\iiint_V k.f(x,y,z)dV = k\iiint_V f(x,y,z)dV$$

c) Propiedad aditiva del dominio de integración:

Si es $V = V' + V''$, se tiene:

$$\iiint_V f(x,y,z)dV = \iiint_{V'} f(x,y,z)dV + \iiint_{V''} f(x,y,z)dV$$

d) Acotación

Si es $f(x,y,z) \leqslant \varphi(x,y,z)$ en V, se tiene:

$$\iiint_V f(x,y,z)dV \leqslant \iiint_V \varphi(x,y,z)dV$$

e) Acotación modular

Si es $|f(x,y,z)| < M$ en V, se tiene

$$\left|\iiint_V f(x, y, z)dV\right| < M \cdot V$$

Siendo V el volumen encerrado en el dominio.

f) Teorema de la media

Si es $f(x, y, z)$ continua en V, existe un punto al menos $(x_0, y_0, z_0) \in V$, tal que:

$$\iiint_V f(x, y, z)dV = f(x_0, y_0, z_0) \cdot V$$

siendo V el volumen encerrado en el dominio.

3.- Cálculo de volúmenes utilizando integrales triples.-

Si queremos calcular el volumen encerrado en un dominio espacial V, limitado por una curva cerrada S, basta con que apliquemos el concepto de integral triple a la función $U = f(x, y, z) = 1$, con lo que quedaría:

$$f(p_k) = 1,$$

$$V = \lim_{n \to \infty} \sum_{k=1}^{n} f(p_k) \cdot \Delta V_k = \lim_{n \to \infty} \sum_{k=1}^{n} \Delta V_k$$

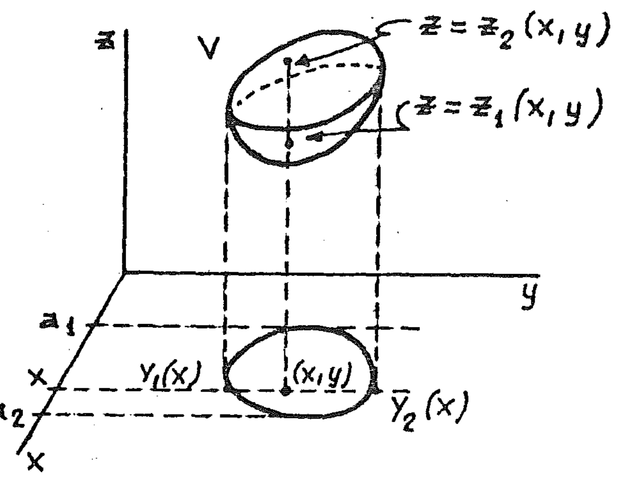
pero ese límite viene dado por la siguiente integral triple y se tendrá:

$$V = \iiint_V dV$$

4.- Generalización del concepto de integral triple.-

En la definición de integral triple, se ha considerado una función $f(x, y, z)$ acotada, en un dominio espacial V, limitado por una superficie cerrada S. Vamos a extender la definición de integral triple para los casos de funciones no acotadas y de dominios ilimitados.

Si la función $f(x, y, z)$ se hace infinita en algún punto A del dominio V dado, rodeamos A con un entorno esférico E de radio $\varepsilon$ y se calcula la integral triple en el dominio resultante al quitar a V dicha esfera (V-E). Si existe el límite de esta integral cuando $\varepsilon$ tiende a cero, le llamamos, por definición, integral triple de $f(x, y, z)$ en V.




Aplicando la fórmula obtenida en la pregunta anterior, se tendrá:

$$\iiint_{V} f(x, y, z)dV = \iiint_{P} f(x, y, z)dxdydz = \iint_{R} dxdy \int_{z_1(\ ,\ )}^{z_2(x, y)} f(x, y, z)\ dz =$$

$$= \int_{a_1}^{a_2} dx \int_{y_1(x)}^{y_2(x)} dy \int_{z_1(x, y)}^{z_2(x, y)} f(x, y, z)dz$$

Se podrían obtener expresiones similares cambiando el orden de integración.

La ecuación del contorno de R, se puede obtener eliminando z entre la ecuación $\varphi(x, y, z) = 0$ y $\partial\varphi/\partial z = 0$, lo que equivale a expresar que el plano tangente a la superficie S en los puntos de contorno aparente es perpendicular al plano $z = 0$.

7.- Teorema de Gauss ó Ostrogradski.-

Consideremos un dominio espacial V, limitado por una superficie cerrada S de ecuación $\varphi(x, y, z) = 0$, siendo las funciones continuas $z = z_1(x, y)$, $z = z_2(x, y)$ las dos determinaciones de z correspondientes a cada valor de xy de un cierto dominio plano R, obtenido como proyección del dominio V sobre el plano xy.

Consideremos la función $Z(x, y, z)$ continua y con derivada continua respecto de z en todos los puntos de V. Consideremos la integral:

$$I = \iiint_V \frac{\partial Z(x, y, z)}{\partial z} dx.dy.dz$$

e integrémosla primeramente respecto de z

$$I = \iiint_V \frac{\partial Z}{\partial z}.dx.dy.dz = \iint_R dxdy \int_{z_1(x,y)}^{z_2(x,y)} \frac{\partial Z}{\partial z}.dz = \iint_R Z[x, y, z_2(x, y)]dxdy -$$

$$- \iint_R Z[x, y, z_1(x, y)]dx.dy$$

Si consideramos la seminormal exterior a la superficie S y llamamos $\gamma$ el ángulo que dicha recta forma con el eje + OZ, cos $\gamma$ será positivo en $z_2$ y negativo en $z_1$, y se tendrá:

$$\cos\gamma . d\sigma = dx\ dy$$

$$I = \iint_{S_1} Z[x, y, z_2(xy)]\cos\gamma . d\sigma + \iint_{S_2} Z[x, y, z_1(x, y)]\cos\gamma . d\sigma =$$

$$= \iint_S Z[x, y, z].\cos\gamma . d\sigma = \iiint_V \frac{\partial Z(x, y, z)}{\partial z} dxdydz \qquad (1)$$

Esta fórmula iguala la integral triple extendida a un dominio V con la integral de superficie extendida a la cara exterior S de la superficie que encierra el dominio V.

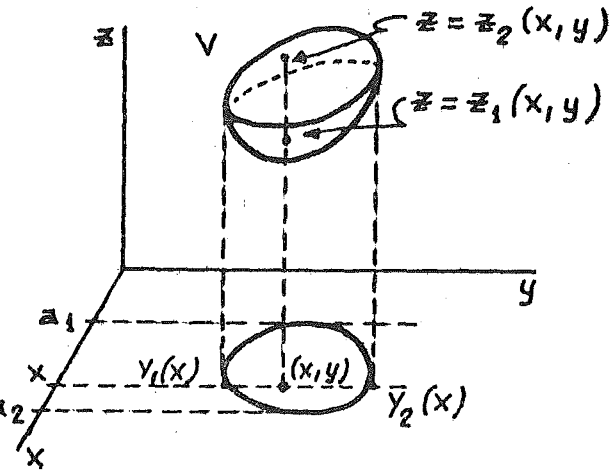
De modo semejante obtendríamos las relaciones:

$$\iiint_V \frac{\partial Y(x, y, z)}{\partial y}.dxdydz = \iint_S Y(x, y, z).\cos\beta . d\sigma \qquad (2)$$

$$\iiint_V \frac{\partial X(x, y, z)}{\partial x} dxdydz = \iint_S X(x, y, z).\cos\alpha . d\sigma \qquad (3)$$

Sumando (1), (2) y (3) se obtiene la fórmula de Gauss ó de Ostrogradski

$$\iiint_V \left(\frac{\partial X}{\partial x} + \frac{\partial Y}{\partial y} + \frac{\partial Z}{\partial z}\right).dxdydz = \iint_S [X.\cos\alpha + Y\cos\beta + Z.\cos\gamma]d\sigma \qquad (4)$$




Aplicando la fórmula obtenida en la pregunta anterior, se tendrá:

$$\iiint_V f(x,y,z)dV = \iiint_P f(x,y,z)dxdydz = \iint_R dxdy \int_{z_1(x,y)}^{z_2(x,y)} f(x,y,z)\ dz =$$

$$= \int_{a_1}^{a_2} dx \int_{y_1(x)}^{y_2(x)} dy \int_{z_1(x,y)}^{z_2(x,y)} f(x,y,z)dz$$

Se podrían obtener expresiones similares cambiando el orden de integración.

La ecuación del contorno de R, se puede obtener eliminando z entre la ecuación $\varphi(x,y,z) = 0$ y $\partial\varphi/\partial z = 0$, lo que equivale a expresar que el plano tangente a la superficie S en los puntos de contorno aparente es perpendicular al plano $z = 0$.

7.- Teorema de Gauss ó Ostrogradski.-

Consideremos un dominio espacial V, limitado por una superficie cerrada S de ecuación $\varphi(x,y,z) = 0$, siendo las funciones continuas $z = z_1(x,y)$, $z = z_2(x,y)$ las dos determinaciones de z correspondientes a cada valor de xy de un cierto dominio plano R, obtenido como proyección del dominio V sobre el plano xy.

Consideremos la función $Z(x,y,z)$ continua y con derivada continua respecto de z en todos los puntos de V. Consideremos la integral:

$$I = \iiint_V \frac{\partial Z(x, y, z)}{\partial z} \, dx.dy.dz$$

e integrémosla primeramente respecto de z

$$I = \iiint_V \frac{\partial Z}{\partial z} . dx. dy. dz = \iint_R dxdy \int_{z_1(x, y)}^{z_2(x, y)} \frac{\partial Z}{\partial z} . dz = \iint_R Z \, [x, y, z_2(x, y)] dxdy \; -$$

$$- \iint_R Z \, [x, y, z_1(x, y)] dx. dy$$

Si consideramos la seminormal exterior a la superficie S y llamamos $\gamma$ el ángulo que dicha recta forma con el eje + OZ, $\cos \gamma$ será positivo en $z_2$ y negativo en $z_1$, y se tendrá:

$$\cos \gamma . d\sigma = dx \; dy$$

$$I = \iint_{S_1} Z \, [x, y, z_2(xy)] \cos \gamma . \, d\sigma + \iint_{S_2} Z \, [x, y, z_1(x, y)] \cos \gamma . d\sigma =$$

$$= \iint_S Z \, [x, y, z] . \cos \gamma \, . d\sigma \pm \iiint_V \frac{\partial Z(x, y, -)}{\partial z} \, dxdydz \qquad (1)$$

Esta fórmula iguala la integral triple extendida a un dominio V con la integral de superficie extendida a la cara exterior S de la superficie que encierra el dominio V.

De modo semejante obtendríamos las relaciones:

$$\iiint_V \frac{\partial Y(x, y, z)}{\partial y} . dxdydz = \iint_S Y(x, y, z) . \cos \beta . d\sigma \qquad (2)$$

$$\iiint_V \frac{\partial X(x, y, z)}{\partial x} \, dxdydz = \iint_S X(x, y, z) . \cos \alpha \, . d\sigma \qquad (3)$$

Sumando (1), (2) y (3) se obtiene la fórmula de Gauss ó de Ostrogradski

$$\iiint_V \left(\frac{\partial X}{\partial x} + \frac{\partial Y}{\partial y} + \frac{\partial Z}{\partial z}\right) . dxdydz = \iint_S [X . \cos \alpha + Y \cos \beta + Z . \cos \gamma] d\sigma \; (4)$$

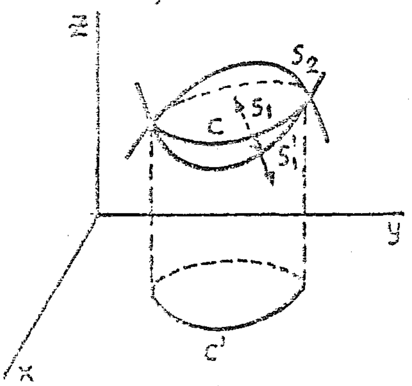
Esta fórmula es de gran interés en la teoría de campos, por transformar una integral de volumen en una integral doble sobre la superficie que limita dicho volumen.

Como consecuencia, se deduce que la condición necesaria y suficiente para que una integral de superficie

$$\iint_S (X \cos\alpha + Y \cos\beta + Z \cos\gamma)d\sigma$$

extendida a la cara exterior de una superficie S sea nula, cualquiera que sea dicha superficie, es que sea nula la función subintegral de la triple correspondiente a ella al aplicar la fórmula (4) de Gauss, o sea

$$\frac{\partial X}{\partial x} + \frac{\partial Y}{\partial y} + \frac{\partial Z}{\partial z} = 0 \qquad (5)$$




De otro modo, supongamos una línea C y dos superficies $S_1$ y $S_2$ uniformes y continuas que pasan por C y tienen de ecuación $z = z_1(x, y)$, $z = z_2(x, y)$ respectivamente. Sobre $S_1$ y $S_2$ se definen dos integrales de superficie

$$I_1 = \iint_{S_1} (Xdydz + Ydxdz + Zdxdy)$$

$$I_2 = \iint_{S_2} (Xdydz + Ydxdz + Zdxdy)$$

La condición para que la integral de superficie no dependa del casquete, sino sólo de su contorno C, es que cualquiera que sean $S_1$ y $S_2$ se tenga $I_1 = I_2$, $I_2 - I_1 = 0$, pero

$$I_2 - I_1 = \iint_{S_2} - \iint_{S_1} = \iint_{S_2} + \iint_{S'_1} = \iint_{S} = 0$$

lo que implica la misma condición (5) anterior.

A la expresión:

$$\frac{\partial X}{\partial x} + \frac{\partial Y}{\partial y} + \frac{\partial Z}{\partial z}$$

se le llama divergencia del vector de componentes X, Y, Z.

8.- Cambio de variables en una integral triple.-

De acuerdo a los razonamientos ya expuestos cuando se estudió este problema en las integrales dobles, supongamos que queremos calcular $\iiint_V f(x, y, z)dxdydz$ siendo la función $f(x, y, z)$ continua en V, estando dicho dominio limitado por una superficie S cerrada, y queremos sustituir las variables x, y, z por otras nuevas u, v, w, relacionadas con ellas mediante las ecuaciones de transformación:

$$x = x(u, v, w), \quad y = y(u, v, w), \quad z = a(u, v, w) \qquad (1)$$

siendo estas tres funciones uniformes, continuas y con derivadas continuas en todos los puntos del dominio V' transformado del V mediante dichas ecuaciones, cumpliéndose además que las ecuaciones (1) establecen una correspondencia biunívoca entre los dominios V y V'.

De igual modo que en las integrales dobles, se puede demostrar la siguiente fórmula:

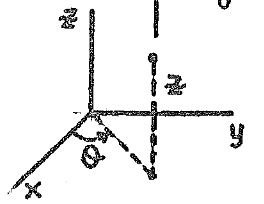
$$\iiint_V f(x, y, z)dxdydz = \iiint_{V'} f\,[\,x(u, v, w),\ y(u, v, w),\ z(u, v, w)\,]\,.\left|\frac{D(x, y, z)}{D(u, v, w)}\right| du.dv.w$$

siendo:

$$\frac{D(x, y, z)}{D(u, v, w)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} & \frac{\partial x}{\partial w} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} & \frac{\partial y}{\partial w} \\ \frac{\partial z}{\partial u} & \frac{\partial z}{\partial v} & \frac{\partial z}{\partial w} \end{vmatrix}$$

Cuando se trate de coordenadas cilíndricas:

$$\begin{cases} x = \rho \cos \vartheta \\ y = \rho \operatorname{sen} \vartheta \\ z = z \end{cases} \qquad \frac{D(x, y, z)}{D(\rho, \vartheta, z)} = \begin{vmatrix} \cos\vartheta & -\rho \operatorname{sen}\vartheta & 0 \\ \operatorname{sen}\vartheta & \rho\cos\vartheta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = \rho$$

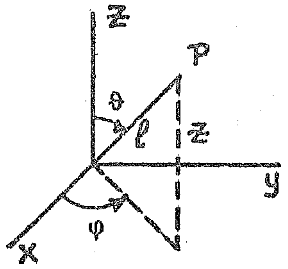



Si son coordenadas esféricas (fig. 1)

$$\left.\begin{aligned} x &= \rho \, . \operatorname{sen}\vartheta \, . \cos\varphi \\ y &= \rho \, . \operatorname{sen}\vartheta \, . \operatorname{sen}\varphi \\ z &= \rho \, . \cos\vartheta \end{aligned}\right\} \qquad \frac{D(x, y, z)}{D(\rho, \vartheta, \varphi)} = \begin{vmatrix} \operatorname{sen}\vartheta\cos\varphi & \rho\cos\vartheta\cos\varphi & -\rho\operatorname{sen}\vartheta\operatorname{sen}\varphi \\ \operatorname{sen}\vartheta\operatorname{sen}\varphi & \rho\cos\vartheta\operatorname{sen}\varphi & \rho\operatorname{sen}\vartheta\cos\varphi \\ \cos\vartheta & -\rho\operatorname{sen}\vartheta & 0 \end{vmatrix} =$$

$$= \rho^2 \operatorname{sen}\vartheta$$

Fig. 1



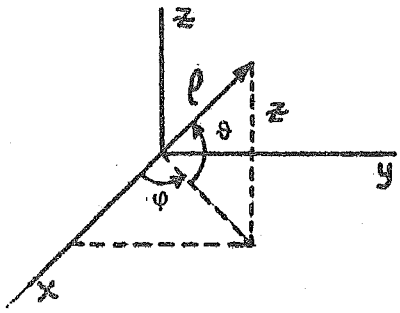




Fig. 2

Si los ángulos los hemos tomado como en la Fig. 2, las ecuaciones serían

$$\left.\begin{aligned} x &= \rho\cos\vartheta \, . \cos\varphi \\ y &= \rho\cos\vartheta \, . \operatorname{sen}\varphi \\ z &= \rho\operatorname{sen}\vartheta \end{aligned}\right\} \text{ y el jacobiano quedaría } \quad \frac{D(x, y, z)}{D(\rho, \vartheta, \varphi)} = \rho^2 . \cos\vartheta$$

9.- <u>Fórmulas de Dirichlet.</u>-

Consideremos la función $f(x, y, z) = x^{p-1}, \ y^{q-1}, \ z^{r-1}$ $(p \geqslant 0, \ q \geqslant 0, \ r \geqslant 0)$, de la queremos hallar su integral triple en el dominio V limitado por las superficies $\left(\frac{x}{a}\right)^{\alpha} + \left(\frac{y}{b}\right)^{\beta} + \left(\frac{z}{c}\right)^{\gamma} \leqslant 1, \ x \geqslant 0, \ y \geqslant 0, \ z \geqslant 0.$ O sea queremos hallar en V la siguiente integral triple:

$$I = \iiint_V x^{p-1}, \ y^{q-1}, \ z^{r-1} \, dx \, dy \, dz \tag{1}$$

Efectuemos el cambio de variable

$$\begin{cases} \left(\frac{x}{a}\right)^{\alpha} = u \\ \left(\frac{y}{b}\right)^{\beta} = v \\ \left(\frac{z}{c}\right)^{\gamma} = w \end{cases}$$

$$\left.\begin{array}{l} x = a.u^{\frac{1}{\alpha}} \\ y = b.v^{\frac{1}{\beta}} \\ z = c.w^{\frac{1}{\gamma}} \end{array}\right\} \qquad \frac{D(x,y,z)}{D(u,v,w)} = \begin{vmatrix} \frac{a}{\alpha}.u^{\frac{1}{\alpha}-1} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{b}{\beta}.v^{\frac{1}{\beta}-1} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{c}{\gamma}.w^{\frac{1}{\gamma}-1} \end{vmatrix} =$$

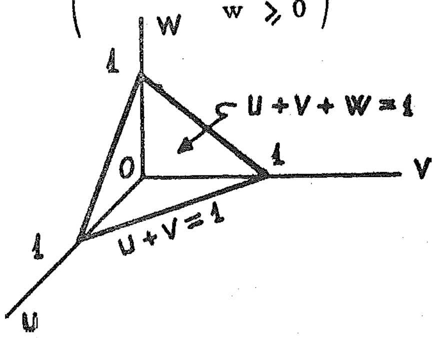
$$= \frac{abc}{\alpha\beta\gamma} .\ u^{\frac{1}{\alpha}-1} .v^{\frac{1}{\beta}-1} .\ w^{\frac{1}{\gamma}-1}$$

La integral (1) quedará pues:

$$I = \frac{a^p b^q c^r}{\alpha\,\beta\,\gamma} . \iiint_{V'} u^{\frac{p}{\alpha}-1} ,\ v^{\frac{q}{\beta}-1},\ w^{\frac{r}{\gamma}-1}.dudvdw$$

estando V' limitado por

$$\begin{cases} u + v + w \leqslant 1 \\ u \geqslant 0 \\ v \geqslant 0 \\ w \geqslant 0 \end{cases}$$




$$I = \frac{abc}{\alpha\beta\gamma} . \int_0^1 u^{\frac{p}{\alpha}-1}\,du \int_0^{1-u} v^{\frac{q}{\beta}-1}\,dv \int_0^{1-u-v} w^{\frac{r}{\gamma}-1}.dw$$

Recordemos que

$$\beta(p,q) = \int_0^1 x^{p-1}(1-x)^{q-1}\,dx = \frac{\Gamma(p).\Gamma(q)}{\Gamma(p+q)}$$

haciendo en ella $x = t/m$ queda

$$\beta(p,q) = \int_0^m \frac{t^{p-1}}{m^{p-1}}.\left(1-\frac{t}{m}\right)^{q-1}.\ \frac{dt}{m} = \frac{1}{m^{p+q-1}}\int_0^m t^{p-1}(m-t)^{q-1}\,dt$$

o sea:

$$\int_0^m t^{p-1}(m-t)^{q-1}dt = m^{p+q-1}.\beta(p,q) = m^{p+q-1}\frac{\Gamma(p).\Gamma(q)}{\Gamma(p+q)} \qquad (3)$$

Vamos a aplicar (3) al cálculo de (2), considerando $m = 1-u$

$$I = \frac{a^p.b^q.c^r}{\alpha\ \beta\ \gamma}\int_0^1 u^{\frac{p}{\alpha}-1}du\int_0^{1-u}\frac{v^{\frac{q}{\beta}-1}\left[(1-u)-v\right]^{\frac{r}{\gamma}}}{\frac{r}{\gamma}}dv =$$

$$= \frac{a^p.b^q.c^r}{\alpha\ \beta\ \gamma}.\frac{\gamma}{r}.\int_0^1 u^{\frac{p}{\alpha}-1}.du.(1-u)^{\frac{q}{\beta}+\frac{r}{\gamma}}.\frac{\Gamma(\frac{q}{\beta})\,\Gamma(\frac{r}{\gamma}+1)}{\Gamma(\frac{q}{\beta}+\frac{r}{\gamma}+1)} =$$

$$= \frac{a^p.b^q.c^r}{\alpha\ \beta\ \gamma}.\frac{\gamma}{r}.\frac{\Gamma(\frac{q}{\beta}).\ \frac{r}{\gamma}.\Gamma(\frac{r}{\gamma})}{\Gamma(\frac{q}{\beta}+\frac{r}{\gamma}+1)}\int_0^1 u^{\frac{p}{\alpha}-1}.(1-u)^{\frac{q}{\beta}+\frac{r}{\gamma}}.\ du =$$

$$= \frac{a^p.b^q.c^r}{\alpha\ \beta\ \gamma}.\frac{\Gamma(\frac{q}{\beta}).\Gamma(\frac{r}{\gamma})}{\Gamma(\frac{q}{\beta}+\frac{r}{\gamma}+1)}.\frac{\Gamma(\frac{p}{\alpha}).\Gamma(\frac{q}{\beta}+\frac{r}{\gamma}+1)}{\Gamma(\frac{p}{\alpha}+\frac{q}{\beta}+\frac{r}{\gamma}+1)} =$$

$$= \frac{a^p.b^q.c^r}{\alpha\ \beta\ \gamma}.\frac{\Gamma(\frac{p}{\alpha})\,\Gamma(\frac{q}{\beta})\,\Gamma(\frac{r}{\gamma})}{\Gamma(\frac{p}{\alpha}+\frac{q}{\beta}+\frac{r}{\gamma}+1)}$$

Esta fórmula de Dirichlet es de aplicación en numerosas integrales múltiples, extendidas en el interior de ciertos dominios (triángulos, esferas, tetraedros, etc).

## 10.- Centros de gravedad.-

El cálculo de centros de gravedad, es un tema que el alumno ha desarrollado en otras asignaturas, por lo que sólo citaremos las fórmulas más utilizadas que son un claro ejemplo de las integrales múltiples estudiadas.

Si tenemos una línea en el espacio de densidad $Q$ variable, las coordenadas de su c.d.g. vienen dadas por las relaciones:

$$x_g = \frac{\int_c x.Q.ds}{\int_c Q.\,ds} \; ; \; y_g = \frac{\int_c y.Q.ds}{\int_c Q.\,ds} \; ; \; z_g = \frac{\int_c z.Q.\,ds}{\int_c Q.\,ds}$$

siendo las integrales que aparecen curvilíneas y ds un elemento de longitud sobre dicha línea.

Si es una superficie de densidad $Q$ variable, las integrales serán dobles y las coordenadas del c.d.g. serán:

$$x_g = \frac{\iint_s x.Q.d\sigma}{\iint_s Q.d\sigma} \; ; \; y_g = \frac{\iint_s y.Q.d\sigma}{\iint_s Q.d\sigma} \; ; \; z_g = \frac{\iint_s z.Q.d\sigma}{\iint_s Q.d\sigma}$$

Del mismo modo para un volumen se tendrá:

$$x_g = \frac{\iiint_v x.Q.dv}{\iiint_v Q.dv} \; ; \; y_g = \frac{\iiint_v y.Q.dv}{\iiint_v Q.dv} \; ; \; z_g = \frac{\iiint_v z.Q.dv}{\iiint_v Q.dv}$$

Si la línea, superficie ó volumen son homogéneas, será $Q$ constante, y se simplificarán las fórmulas apareciendo en el denominador la longitud, área ó volumen respectivamente de la figura considerada.

11.- Momentos de inercia.-

Por los mismos motivos que se citaron en la pregunta anterior, vamos a escribir exclusivamente las fórmulas que se utilizan.

Momentos de inercia de una línea con respecto a los planos coordenados:

$$I_{xy} = \int_c z^2.ds \; ; \; I_{xz} = \int_c y^2\, ds \; ; \; I_{yz} = \int_c z^2 ds$$

Momentos de inercia de una superficie respecto de los planos coordenados:

$$I_{xy} = \iint_s z^2.d\sigma \qquad I_{xz} = \iint_s y^2\, d\sigma \qquad I_{yz} = \iint_s z^2\, d\sigma$$

Momentos de inercia de un volumen respecto de los planos coordenados

$$I_{xy} = \iiint_V z^2\, dv \qquad I_{xz} = \iiint_V y^2 dv \qquad I_{yz} = \iiint_V z^2\, dv$$

Momentos de inercia respecto de los ejes coordenados

$$I_x = I_{xz} + I_{xy} \qquad I_y = I_{xy} + I_{yz} \qquad I_z = I_{xz} + I_{yz}$$

Momento de inercia polar $I_0$ respecto del origen

$$I_0 = I_{xy} + I_{xz} + I_{yz} = \frac{1}{2}(I_x + I_y + I_z)$$

12.- Ejemplos

12.1.- Sea V el volumen encerrado por el elipsoide

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1. \text{ Calcular:}$$

$$I = \iiint_V x^2\, dx\, dy\, dz$$

$$I = \iiint_V x^2\, dx\, dy\, dz = \int_{-a}^{a} x^2\, dx \iint_R dy\, dz = \int_{-a}^{a} x^2 . S_R . dx$$

siendo $S_R$ el área de la elipse obtenida al cortar al elipsoide con el plano $x$ = constante; quedará pues

$$\frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1 - \frac{x^2}{a^2}$$

$$\frac{y^2}{b^2\left(1 - \frac{x^2}{a^2}\right)} + \frac{z^2}{c^2\left(1 - \frac{x^2}{a^2}\right)} = 1 \qquad \text{y el área será}$$

$$S_R = \pi\, b \sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2}} \,.\, c \sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2}} = \pi\, bc \left(1 - \frac{x^2}{a^2}\right)$$

Luego tenemos:

$$I = \iiint_V x^2 dx\,dy\,dz = \pi\, b\, c \int_{-a}^{a} x^2\left(1 - \frac{x^2}{a^2}\right) dx = \frac{4}{15}\,\pi\, a^3\, bc$$

**12.2.- Volumen del sólido limitado por la esfera $\rho = 2a\cos\vartheta$ y el cono $\vartheta = \alpha$, donde $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$. Discutir el caso $\alpha = \pi/2$.**

$V = \iiint_V dxdydz$. Pasamos a esféricas:

$$\left.\begin{aligned} x &= \rho\,\mathrm{sen}\,\vartheta\cos\varphi \\ y &= \rho\,\mathrm{sen}\,\vartheta\,\mathrm{sen}\,\varphi \\ z &= \rho\cos\vartheta \end{aligned}\right\} \quad J = \frac{D(x,y,z)}{D(\rho,\vartheta,\varphi)} = \rho^2\,\mathrm{sen}\,\vartheta$$

$$V = \iiint_{V'} \rho^2\,\mathrm{sen}\,\vartheta\,.\,d\rho\,.\,d\varphi\,.\,d\vartheta = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\alpha} \mathrm{sen}\,\vartheta\, d\vartheta \int_0^{2a\cos\vartheta} \rho^2 . d\rho =$$

$$= 2\pi \int_0^{\alpha} \mathrm{sen}\vartheta\, \frac{8a^3}{3} . \cos^3\vartheta\, d\vartheta = \frac{4\pi a^3}{3}\left[\cos^4\alpha - 1\right]$$

como $\cos^4\alpha \leqslant 1$ cambiamos el signo

$$V = \frac{4\pi a^3}{3}\left[1 - \cos^4\alpha\right]$$

Si $\alpha = \frac{\pi}{2}$, $v = \frac{4\pi a^3}{3}$, la fórmula da **el volumen de la esfera, lo que no tiene sentido, ya que para $\alpha = \pi/2$ el cono degenera en el plano $z = 0$ y el volumen limitado se hace infinito.**

12.3.- Calcular la integral triple:

$$I = \iiint_V \frac{y^2 z^2}{\mathrm{sen}^5 x} . dxdydz$$

extendida al volumen encerrado por la superficie

$$4y^2 + az^2 = (\pi - x)\,\mathrm{sen}^2 x \quad (a > 0)$$

$(\pi - x)$ ha de ser positivo, luego x varía de 0 a $\pi$ .

Las secciones obtenidas al cortar con z constante son elipses de ecuaciones $4y^2 + az^2 = (\pi - x)\operatorname{sen}^2 x$,

$$\frac{y^2}{(\pi - x).\operatorname{sen}^2 x/4} + \frac{z^2}{(\pi - x)\operatorname{sen}^2 x/a} = 1 \equiv R$$

$$I = \int_0^{\pi} \frac{dx}{\operatorname{sen}^5 x} \iint_R y^2 z^2 dxdy$$

En la integral doble extendida a R aplico la fórmula de Dirichlet

$$I = 4\int_0^{\pi} \frac{dx}{\operatorname{sen}^5 x} \frac{(\pi - x)^3.\operatorname{sen}^6 x.\ \Gamma(\frac{3}{2}).\ \Gamma(\frac{3}{2})}{\Gamma(4)} = \frac{\pi}{24}\int_0^{\pi} (\pi - x)^3.\operatorname{sen} x\ dx = \frac{\pi^4}{24} + \frac{\pi^2}{4}$$

12.4.- Calcular la integral triple

$$I = \iiint_v (ax+by+cz)^2 dx\ dy\ dz$$

extendida al volumen $x^2 + y^2 + z^2 \leqslant 1$.

$$I = \iiint_v (ax+by+cz)^2 dxdydz = \iiint_v (a^2x^2+b^2y^2+c^2z^2+2abxy+2acxz+2bcyz)dxdydz$$

$\iiint_v xydv = \iiint_v xzdv = \iiint_v yzdv = 0$ por ser las funciones subintegrales impares en el volumen de integración.

$\iiint_v x^2 dv = \iiint_v y^2 dv = \iiint_v z^2 dv$ por la simetría del dominio v, luego

$$I = (a^2+b^2+c^2)\iiint_v z\ dxdydz = 8(a^2+b^2+c^2)\iiint_{v'} z^2 dv$$

siendo v' el volumen encerrado en el primer octante. Aplicando a la última integral la fórmula de Dirichlet.

$$I = \frac{4}{15}\pi(a^2+b^2+c^2)$$

12.5.- Calcular la integral:

$$I = \iiint_V \frac{dx\,dy\,dz}{(x^2+y^2+z^2+a^2)^2}$$

extendida a todo el espacio.

Consideremos primero V como el dominio E limitado por una esfera de radio R y posteriormente tomaremos límites cuando el radio R tiende a infinito.

$$I_1 = \iiint_E \frac{dx\,dy\,dz}{(x^2+y^2+z^2+a^2)^2}$$

$$\left\{\begin{array}{l} x = \varrho\cos\varphi\cos\vartheta \\ y = \varrho\cos\varphi\,\mathrm{sen}\,\vartheta \\ z = \varrho\,\mathrm{sen}\,\varphi \end{array}\right\} \quad J = \varrho^2\cos\varphi$$

$$I_1 = 8\int_0^R \frac{\varrho^2}{(\varrho^2+a^2)^2}\,d\varrho \int_0^{\pi/2}\cos\varphi\,d\varphi\int_0^{\pi/2} d\vartheta = 8\int_0^R \frac{\varrho^2}{(\varrho^2+a^2)^2}\,d\varrho\int_0^{\pi/2}\cos\varphi\,d\varphi.\frac{\pi}{2} =$$

$$= 4\pi\int_0^R \frac{\varrho^2}{(\varrho^2+a^2)^2}\,d\varrho = 2\pi\left[\frac{1}{a}.\mathrm{arctg}\,\frac{\varrho}{a} - \frac{\varrho}{\varrho^2+a^2}\right]_0^R = 2\pi\left[\frac{1}{a}.\mathrm{arctg}\,\frac{R}{a} - \frac{R}{R^2+a^2}\right]$$

$$I = \lim_{R\to\infty} I_1 = \lim_{R\to\infty} 2\pi\left[\frac{1}{a}.\mathrm{arctg}\,\frac{R}{a} - \frac{R}{R^2+a^2}\right] = \frac{\pi^2}{a}$$

12.6.- Calcular

$$I = \iiint_V (x+y+z)^{2n}\,dx\,dy\,dz$$

extendido al volumen $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$

siendo $\underline{n}$ un número real positivo.

Se efectua el cambio de variables

$$\left\{\begin{array}{l} x = au \\ y = bv \\ z = cw \end{array}\right. \qquad J = abc\ ; \qquad I = abc\iiint_V (au+bv+cw)^{2n}\,du\,dv\,dw$$

V' es el volumen encerrado por $u^2 + v^2 + w^2 \leqslant 1$

La distancia del punto (u, v, w) al plano $au + bv + cw = 0$

es $$p = \frac{au + bv + cw}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}$$

Luego

$$I = abc\,(a^2+b^2+c^2)^n \iiint_{u^2+v^2+w^2 \leqslant 1} \varrho^{2n}\, du\, dv\, dw$$

Por la simetría de la esfera queda:

$$I = abc\,(a^2+b^2+c^2)^n \iiint_{u^2+v^2+w^2 \leqslant 1} w^{2n}\, du\, dv\, dw$$

Efectuando el cambio a esféricas

$$I = abc(a^2+b^2+c^2)^n \iiint_{0,\ \varrho \leqslant 1}^{2\pi} \varrho^{2n+2} \cos^{2n}\vartheta \operatorname{sen}\vartheta \, d\varrho\, d\vartheta\, d\Psi =$$

$$= abc\,(a^2+b^2+c^2) \int_0^{2\pi} d\Psi \int_0^1 \varrho^{2n+2}\, d\varrho \int_0^{\pi} \cos^{2n}\vartheta \operatorname{sen}\vartheta\, d\vartheta =$$

$$= abc(a^2+b^2+c^2)^n\, 2\pi \frac{1}{2n+3} \cdot \frac{2}{2n+1} = \frac{4\pi\, abc(a^2+b^2+c^2)^n}{(2n+3)\,(2n+1)}$$

# 8

# Introducción a la teoría de los campos escalares y vectoriales

# LECCION 8

## INTRODUCCION A LA TEORIA DE LOS CAMPOS ESCALARES Y VECTORIALES

### 1.- Gradiente.-

Consideremos la función uniforme, continua y derivable en una cierta región del espacio, $U = U(x, y, z)$ que nos define para cada punto $(x, y, z)$ de dicha región un número U. A esta distribución se le llama campo escalar; llamamos superficies de nivel del campo a las superficies $U = U(x, y, z) = K$, siendo K constante.

Se define como gradiente de U al vector

$$\text{grad } U = \frac{\partial U}{\partial x} . \bar{i} + \frac{\partial U}{\partial y} . \bar{j} + \frac{\partial U}{\partial z} . \bar{K}$$

Si definimos el operador diferencial nabla $\nabla$ (operador de Hamilton)

$$\nabla = \frac{\partial}{\partial x} \bar{i} + \frac{\partial}{\partial y} \bar{j} + \frac{\partial}{\partial z} \bar{K} = \bar{i} \frac{\partial}{\partial x} + \bar{j} \frac{\partial}{\partial y} + \bar{k} \frac{\partial}{\partial z}$$

el gradiente de U lo podremos escribir en función de este operador de la siguiente forma:

$$\text{grad } U = \nabla U$$

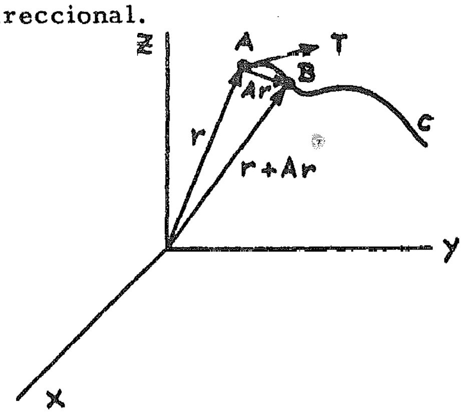
De modo trivial se podría demostrar las siguientes propiedades:

a) $\nabla(C.U) = C. \nabla U$ siendo c un escalar independiente de $x, y, z$.

b) $\nabla(u+v) = \nabla u + \nabla v$.

c) $\nabla(u.v) = u. \nabla v + v. \nabla u$.

Para ver el significado geométrico del vector gradiente, vamos a dar el concepto de derivada direccional.



Consideremos una curva C en el espacio y dos puntos de ella $A(x, y, z)$ y $B(x+\Delta x,\ y+\Delta y,\ z+\Delta z)$. Los vectores de posición de A y B serán:

$$\bar{r} = x.\bar{i} + y.\bar{j} + z.\bar{k}$$

$$\bar{r} + \overline{\Delta r} = (x+\Delta x).\bar{i}+(y+\Delta y).\bar{j}+(z+\Delta z).\bar{k}$$

Sea $\varphi(x, y, z)$ una función escalar, continua y derivable en una cierta región del espacio que contiene el arco de c desde A hasta B.

Definimos como derivada direccional de $\varphi(x, y, z)$ en el punto A, en la dirección del vector unitario $\bar{T}$ tangente a c en A a la expresión:

$$\frac{\partial\varphi}{\partial s} = \lim_{\Delta s \to 0} \frac{\varphi(x+\Delta x,\ y+\Delta y,\ z+\Delta z) - \varphi(x, y, z)}{\Delta s}$$

siendo $\Delta s$ la longitud del arco de c de A a B.

El vector unitario $\bar{T}$ tangente a C en un punto cualquiera A es:

$$\bar{T} = \frac{d\bar{r}}{ds} = \frac{dx}{ds}.\bar{i} + \frac{dy}{ds}.\bar{j} + \frac{dz}{ds}.\bar{k}$$

por otro lado:

$$\frac{\partial\varphi}{ds} = \frac{\partial\varphi}{\partial x}.\frac{dx}{ds} + \frac{\partial\varphi}{\partial y}.\frac{dy}{ds} + \frac{\partial\varphi}{\partial z}.\frac{dz}{ds} = \overline{\text{grad}\varphi}.\bar{T}$$

o sea

$$\frac{\partial\varphi}{\partial s} = \overline{\nabla\varphi}.\bar{T} = |\overline{\nabla\varphi}|.\ \bar{T}.\cos\vartheta = |\nabla\varphi|.\ \cos\vartheta \qquad (1)$$

$|\bar{T}| = 1$ y siendo $\vartheta$ el ángulo que forman el vector gradiente $\overline{\nabla\varphi}$ y el vector unitario $\bar{T}$ tangente a la curva C.

Como $-1 \leqslant \cos\vartheta \leqslant 1$, $\frac{\partial\varphi}{ds}$ alcanza su valor máximo cuando $\vartheta = 0$, o sea cuando $\bar{T}$ y $\overline{\nabla\varphi}$ tienen la misma dirección,

$$\left(\frac{\partial\varphi}{\partial s}\right)_{\text{máx}} = |\nabla\varphi| \qquad (2)$$

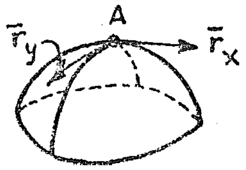
Luego el gradiente es la derivada máxima.

Para ver la dirección del vector gradiente, calculemos un vector unitario normal a una superficie S. Sea la superficie representada por:

$x = x \qquad y = y \qquad z = z(x.y)$ ó vectorialmente

$$\overline{r(x,y)} = x.\bar{i} + y.\bar{j} + z(x.y).\bar{k}$$

Las derivadas parciales representan vectores tangentes a líneas de la superficie que pasan por A, así pues derivando respecto de x é y




$$\left.\begin{aligned} \bar{r}_x &= \bar{i} + \frac{\partial z}{\partial x}.\bar{k} \\ \bar{r}_y &= \bar{j} + \frac{\partial z}{\partial y}.\bar{k} \end{aligned}\right\}$$

si la superficie viene en implícitas

$$\varphi(x,y,z) = 0 \left\{ \begin{aligned} \frac{\partial z}{\partial x} &= -\frac{\varphi'x}{\varphi'z} \\ \frac{\partial z}{\partial y} &= -\frac{\varphi'y}{\varphi'z} \end{aligned}\right.$$

luego:

$$\left\{ \begin{aligned} \bar{r}_x &= \bar{i} - \frac{\varphi'x}{\varphi'z}.\bar{k} \\ \bar{r}_y &= \bar{j} - \frac{\varphi'y}{\varphi'z}.\bar{k} \end{aligned}\right.$$

$$\bar{r}_x \times \bar{r}_y = \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ 1 & 0 & -\dfrac{\varphi'x}{\varphi'z} \\ 0 & 1 & -\dfrac{\varphi'y}{\varphi'z} \end{vmatrix} = \frac{\varphi'x}{\varphi'z}.\bar{i} + \frac{\varphi'y}{\varphi'z}.\bar{j} + \bar{k} = \frac{1}{\varphi'z}(\varphi'x.\bar{i} + \varphi'y.\bar{j} + \varphi'z.\bar{k})$$

el vector unitario normal $\bar{n}$ será:

$$\bar{n} = \frac{\bar{r}_x \times \bar{r}_y}{|r_x \times r_y|} = \frac{\varphi'x.\bar{i} + \varphi'y.\bar{j} + \varphi'z.\bar{k}}{\sqrt{\varphi'x^2 + \varphi'y^2 + \varphi'z^2}}$$

recordando la expresión del gradiente $\overline{\nabla\varphi}$ se observa:

$\bar{n} = \dfrac{\overline{\nabla\varphi}}{|\overline{\nabla\varphi}|}$, (3), luego el vector $\overline{\nabla\varphi}$ es perpendicular a la superficie S definida por $\varphi(x, y, z) = c$.

De (1), (2) y (3), tenemos que:

$$\frac{\partial \varphi}{\partial n} = \overline{\nabla \varphi} \cdot \overline{n} = |\overline{\nabla \varphi}| \cdot |\overline{n}| \cdot \cos 0º = |\overline{\nabla \varphi}|$$

Luego resumiendo, el vector gradiente tiene por módulo la derivada de $\varphi$ en la dirección de la normal a la superficie, por dirección la de la normal a dicha superficie de nivel y por sentido el de la $\varphi$ creciente. Es por lo tanto independiente de la elección de ejes.

2.- Divergencia de una función vectorial.-

Supongamos tres funciones uniformes, continuas, derivables y con derivables continuas $X(x, y, z)$, $Y(x, y, z)$, $Z(x, y, z)$, para los valores de $(x, y, z)$ pertenecientes a un cierto dominio del espacio R. Estas funciones definirán en cada punto del espacio un vector $\overline{V}$ de componentes X, Y, Z que llamaremos función vectorial o campo vectorial. Multipliquemos escalarmente el vector $\overline{V}$ por el vector simbólico $\overline{\nabla}$

$$\begin{cases} \overline{\nabla} = \dfrac{\partial}{\partial x}\,\overline{i} + \dfrac{\partial}{\partial y}\,\overline{j} + \dfrac{\partial}{\partial z}\,\overline{k} \\ \overline{V} = X . \overline{i} + Y . \overline{j} + Z . \overline{k} \end{cases}$$

$$\overline{\nabla} \cdot \overline{V} = \frac{\partial X}{\partial x} + \frac{\partial Y}{\partial y} + \frac{\partial Z}{\partial z}$$

A este escalar así obtenido le llamamos divergencia del campo vectorial $\overline{V}$ en el punto x, y, z.

$$\text{div } \overline{V} = \overline{\nabla} \cdot \overline{V}$$

El procedimiento seguido no da significado físico matemático alguno al concepto de divergencia, sino su forma de cálculo. En otras materias el alumno verá múltiples interpretaciones físicas de este importante concepto.

3.- Rotacional de una función vectorial.-

Con las mismas hipótesis establecidas en el número anterior para la definición de divergencia, multipliquemos ahora vectorialmente el vector simbólico $\overline{\nabla}$ por el vector $\overline{V}$

$$\overline{\nabla} \times \overline{V} = \begin{vmatrix} \overline{i} & \overline{j} & \overline{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ X & Y & Z \end{vmatrix} = \left(\frac{\partial Z}{\partial y} - \frac{\partial Y}{\partial z}\right).\overline{i} + \left(\frac{\partial X}{\partial z} - \frac{\partial Z}{\partial x}\right).\overline{j} + \left(\frac{\partial Y}{\partial x} - \frac{\partial X}{\partial y}\right).\ \overline{k}$$

Al vector así obtenido se le llama rotacional, curl ó torbellino de la función ó campo vectorial $\overline{V}$ en el punto x, y, z.

$$\text{rot } \overline{V} = \overline{\nabla x}\ \ \overline{V}$$

Si el rotacional es idénticamente nulo, las derivadas cruzadas son iguales y por lo tanto existe un campo escalar $\varphi$ potencial de $\overline{V}$ y recíprocamente, si $\overline{V} = \text{grad}\,\varphi \implies \text{rot } \overline{V} = 0$.

Así pues, la condición necesaria y suficiente para que un campo vectorial $\overline{V}$ sea gradiente de otro escalar es que rot $\overline{V} = 0$. A los campos vectoriales con potencial se les llama irrotacionales.

4.- Laplaciana.-

Si multiplicamos el operador $\overline{\nabla}$ escalarmente por sí mismo, se obtiene otro operador que se llama laplaciana ó operador de Laplace y se representa así

$$\Delta = \nabla^2 = \nabla \cdot \nabla = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$$

Si se lo aplicamos a una función escalar $\varphi(x, y, z)$ queda:

$$\Delta\varphi = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2}$$

Decimos que la función escalar $\varphi$ es armónica, cuando es contínua, tiene derivadas segundas parciales continuas y satisface la ecuación de Laplace $\Delta\varphi = 0$.

El operador de Laplace interviene en la mayoría de los fenómenos de transmisión de energía y son múltiples las aplicaciones en las que aparece.

5.- Circulación de un vector.-

Ya se definió este concepto en la lección 4. Recordemos de nuevo que se llama circulación de un campo vectorial $\overline{V}$ a lo largo de una línea C, a la integral curvilínea del producto escalar de $\overline{V}$ por el vector $\overline{ds}$ de componentes dx, dy, dz, tomado sobre dicha línea, o sea

Circulación de $\overline{V}$ a lo largo de c =

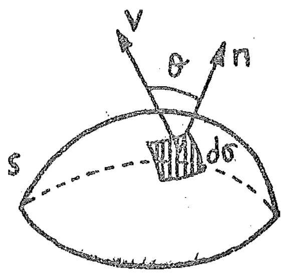
$$= \int_c \overline{V}.\overline{ds} = \int_c X.dx + Y.dy + Z.dz$$

6.- <u>Flujo de un vector. Interpretación vectorial del teorema de Stokes.</u>-

Si consideramos una superficie de dos caras y sobre ella un casquete S, se define como flujo del vector $\overline{V}$ de componentes $X(x,y,z)$, $Y(x,y,z)$, $Z(x,y,z)$ - sobre dicho casquete, a la integral de superficie del producto escalar del vector $\overline{V}$ por el vector $\overline{d\sigma}$ de módulo el área del elemento $d\sigma$ y de dirección la de la seminormal exterior a dicha superficie.

$$\overline{V} = X \,.\, \overline{i} + Y.\overline{j} + Z.\,\overline{k}$$

$$\overline{d\sigma} = dydz\,.\,\overline{i} + dxdz.\overline{j} + dx\,dy\,\overline{k}$$




Flujo del vector $\overline{V}$ sobre S $= \iint_S \overline{V}.\overline{d\sigma} = \iint_S Xdydz + Ydxdz + Zdxdy$

Así pues el flujo es el concepto fisicomatemático que corresponde al de integral de superficie que ya se definió.

Recordemos que el teorema de Stokes decía:

$$\iint_S \left(\frac{\partial Z}{\partial y} - \frac{\partial Y}{\partial z}\right)dydz + \left(\frac{\partial X}{\partial z} - \frac{\partial Z}{\partial x}\right)dxdz + \left(\frac{\partial Y}{\partial x} - \frac{\partial X}{\partial y}\right)dxdy =$$

$$= \int_c Xdx + Ydy + Zdz$$

con las nuevas definiciones dadas en esta lección lo podremos escribir así:

$$\iint_S \text{rot}\ \overline{V}\ .\overline{d\sigma} = \int_c \overline{V}\ .\ \overline{ds} \qquad \text{ó}$$

$$\iint_S (\overline{\nabla}x\overline{V}).\overline{d\sigma} = \int_c \overline{V}.\overline{ds}$$

y se podrá enunciar así: El flujo del rotacional de un vector $\overline{V}$ sobre la cara exterior de un casquete de superficie S, es igual a la circulación del vector $\overline{V}$ a lo largo del contorno c de dicho casquete.

7.- Interpretación vectorial del teorema de Gauss.-

Recordemos el teorema de Gauss que decía

$$\iiint_R \left(\frac{\partial X}{\partial x}+\frac{\partial Y}{\partial y}+\frac{\partial Z}{\partial z}\right)dx\ dy\ dz = \iint_S Xdy\ dz + Z\ dx\ dy + Y\ dx\ dz$$

con las definiciones estudiadas se escribirá:

$$\iiint_R (\text{div}\ \overline{V}).dV = \iint_S \overline{V}.\overline{d\sigma} \qquad \text{ó}$$

$$\iiint_R (\overline{\nabla}.\ \overline{V}).dV = \iint_S \overline{V}.\overline{d\sigma}$$

y se podrá enunciar así: La integral de la divergencia de un vector $\overline{V}$ en un volúmen R es igual al flujo total del vector $\overline{V}$ sobre la cara exterior S de dicho volumen.

Cuando la divergencia es idénticamente nula, también lo es el flujo que atraviesa la cara exterior de toda superficie cerrada. O sea, en toda superficie cerrada son iguales los flujos entrante y saliente.

Si $\overline{V} = \overline{\nabla}\varphi$, se tiene div $\overline{V} = \overline{\nabla}\ .\ \overline{V} = \overline{\nabla}.(\overline{\nabla}\varphi) = \Delta\varphi$

y el teorema de Gauss queda así

$$\iiint_R \Delta\varphi\ .\ dV = \iint_S \overline{\nabla}\varphi.\overline{d\sigma} = \iint_S \frac{\partial\varphi}{\partial n}.d\sigma$$

siendo $\partial\varphi/\partial n$ la derivada de $\varphi$ en la dirección de la normal a la superficie S en cada punto, ya que:

$$\overline{\nabla}\varphi.\overline{d\sigma} = |\overline{\nabla\varphi}|.\ \cos\vartheta\ .d\sigma = \frac{\partial\varphi}{\partial n}.d\sigma$$

8.- Teoremas de Green.-

Consideremos los campos escalares $P(x,y,z)$, $Q(x,y,z)$, y definamos el vector:

$$\overline{V} = P(\overline{\nabla Q}) = P(\frac{\partial Q}{\partial x}\overline{i} + \frac{\partial Q}{\partial y}\overline{j} + \frac{\partial Q}{\partial z}\overline{k}) = P.\frac{\partial Q}{\partial x}\overline{i} + P.\frac{\partial Q}{\partial y}\overline{j} + P\frac{\partial Q}{\partial z}\overline{k}$$

$$\text{div}\ \overline{V} = \text{div}\ [P(\nabla Q)] = \frac{\partial}{\partial x}(P.\frac{\partial Q}{\partial x}) + \frac{\partial}{\partial y}(P.\frac{\partial Q}{\partial y}) + \frac{\partial}{\partial z}(P.\frac{\partial Q}{\partial z}) = \frac{\partial P}{\partial x}.\frac{\partial Q}{\partial x} + \frac{\partial P}{\partial y}.\frac{\partial Q}{\partial y} +$$

$$+ \frac{\partial P}{\partial z}.\frac{\partial Q}{\partial z} + P(\frac{\partial^2 Q}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 Q}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 Q}{\partial z^2}) = \overline{\nabla P}\ .\ \overline{\nabla Q} + P.\Delta Q,$$ aplicando la fórmula de Gauss queda:

$$\iiint_R (\text{div}\ \overline{V}).dv = \iiint_R (\overline{\nabla P}.\ \overline{\nabla Q} + P.\ \Delta Q)dv = \iint_S [P(\overline{\nabla Q})].\overline{d\sigma} \qquad (1)$$

del mismo modo con el vector $V' = Q(\overline{\nabla P})$

$$\iiint_R (\text{div}\ \overline{V'}).dv = \iiint_R (\overline{\nabla Q}.\overline{\nabla P} + Q.\ \Delta P).dv =$$

$$= \iint_S [Q(\overline{\nabla P})]\ \overline{d\sigma} \qquad (2)$$

restando estas dos últimas igualdades queda:

$$\iiint_R (P.\Delta Q - Q.\Delta P)dv = \iint_S [P.\overline{\nabla Q} - Q\ .\ \overline{\nabla P}].\ \overline{d\sigma} = \iint_S [P.\frac{\partial Q}{\partial n} - Q\frac{\partial P}{\partial n}]\overline{d\sigma} \qquad (3)$$

Las relaciones (1), (2) y (3) son los teoremas de Green, que junto con los de Stokes y Gauss se utilizan frecuentemente en la teoría de campos.

9.- Operaciones con el operador $\nabla$.-

Sin demostrar, vamos a escribir algunas relaciones útiles que dejamos como ejercicio su comprobación:

1) $\overline{\nabla}\ .(\overline{\nabla}\varphi) = \Delta\varphi$ , la divergencia del gradiente es la laplaciana.

2) $\overline{\nabla}\times(\overline{\nabla}\varphi) = 0$, el rotacional del gradiente es nulo

3) $\overline{\nabla}.(\overline{\nabla}\times\overline{V}) = 0$, la divergencia del rotacional de un vector es nula.

4) $\overline{\nabla}.(\varphi\,\overline{V}) = \varphi(\overline{\nabla}.\overline{V}) + \overline{V}.(\overline{\nabla}\,\overline{V})$

5) $\overline{\nabla}\times(\varphi\overline{V}) = \varphi(\overline{\nabla}\times\overline{V}) + (\overline{\nabla}\varphi)\times\overline{V} = \varphi(\overline{\nabla}\times\overline{V}) - \overline{V}\times\overline{\nabla}\varphi$

6) $\overline{\nabla}.(\overline{V}_1\times\overline{V}_2) = \overline{V}_2.(\overline{\nabla}\times\overline{V}_1) - \overline{V}_1.(\overline{\nabla}\times\overline{V}_2)$

7) $\overline{\nabla}\times(\overline{\nabla}\times\overline{V}) = \overline{\nabla}(\overline{\nabla}.\overline{V}) - \Delta V$, el rotacional del rotacional de un vector es el gradiente de la divergencia del vector menos la laplaciana.

## 10.- Operadores en coordenadas curvilíneas.-

En la lección 12 se da la definición de sistemas de coordenadas curvilíneas ortogonales.

Supongamos definido tal sistema mediante las ecuaciones:

$$x = x(u, v, w),\quad y = y(u, v, w),\quad z = z(u, v, w) \tag{1}$$

que permiten también determinar de manera única u, v, w en función de x y z.

Si en (1) se dejan constantes v y w, al variar u se obtienen las ecuaciones paramétricas de una curva coordenada, la curva u. Análogamente se obtienen las otras dos curvas coordenadas. Por ser el sistema ortogonal, ocurre que las tangentes en cada punto P a las tres curvas coordenadas que pasan por P forman un triedro trirrectángulo.

### 10.1.- Elemento de longitud en coordenadas curvilíneas.-

Si imaginamos una curva cualquiera que pase por P cuya ecuación vectorial sea

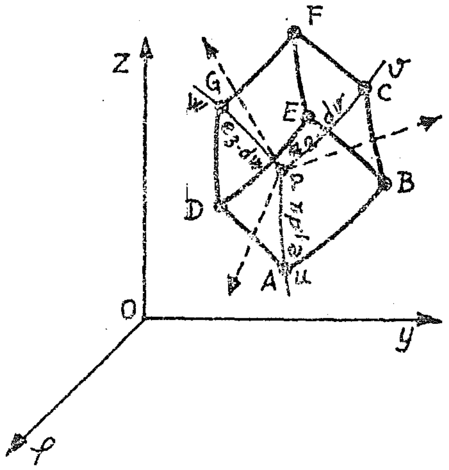
$$\vec{r} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$$

donde x, y, z son funciones de un cierto parámetro, recordemos que el elementos de longitud ds, en coordenadas cartesianas tiene por expresión

$$ds^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2 \tag{2}$$

Si en (1) diferenciamos y sustituimos en (2) las expresiones de dx, dy, dz resulta

$$ds^2 = e_1^2\,du^2 + e_2^2 dv^2 + e_3^2 + dw^2 \tag{3}$$




Siendo:

$$e_1^2 = \left(\frac{\partial x}{\partial u}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial u}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial u}\right)^2, \quad e_2^2 = \left(\frac{\partial x}{\partial v}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial v}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial v}\right)^2,$$

$$e_3^2 = \left(\frac{\partial x}{\partial w}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial w}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial w}\right)^2 \qquad (4)$$

por ser $\frac{\partial x}{\partial u}\cdot\frac{\partial x}{\partial v}+\frac{\partial y}{\partial u}\cdot\frac{\partial y}{\partial v} + \frac{\partial z}{\partial u}\cdot\frac{\partial z}{\partial v} = 0$ etc. en virtud de la ortogonalidad del sistema.

Si aplicamos la expresión (3) al caso de la curva coordenada u, se obtiene $ds_1 = e_1\ du$,,. Análogamente $ds_2 = e_2\ dv$ ,, $ds_3 = e_3\ dw$ (5) donde hemos llamado $ds_i$ al elemento de longitud de la curva coordenada $\underline{i}$ ($i = 1$ curva $\underline{u}$; $i = 2$ curva $\underline{v}$; $i = 3$ curva $\underline{w}$).

Los números $e_i$ son los factores de reducción que expresan los cocientes entre elementos de longitud sobre las curvas coordenadas y las diferenciales de las respectivas coordenadas curvilíneas. Tales números $e_i$ varían de un punto a otro, es decir son funciones de las coordenadas (x, y, z) del punto P. Se les llama también unidades de longitud locales. En la figura se ha representado el paralelepípedo elemental que en coordenadas curvilíneas juega el papel de paralelepípedo elemental de aristas dx, dy, dz del sistema cartesiano rectangular.

10.2.- Expresión de un escalar y de un vector en coordenadas curvilíneas.-

Si consideramos una función escalar U(x, y, z) su expresión en el sistema curvilíneo se obtiene fácilmente sustituyendo x, y, z por sus valores (1).

Si consideramos una función vectorial $\vec{V}(x, y, z)$, y sus componentes según los ejes cartesianos se designan por X, Y, Z, se trata de encontrar las componentes de este vector sobre las tangentes en P a las curvas coordenadas. Se tiene fácilmente:

$$\left.\begin{aligned} V_u &= X \cos(x\ u) + Y \cos(y\ u) + Z \cos(z\ u) \\ V_v &= X \cos(x\ v) + Y \cos(y\ v) + Z \cos(z\ v) \\ V_w &= X \cos(x\ w) + Y \cos(y\ w) + Z \cos(z\ w) \end{aligned}\right\} \qquad (6)$$

Los valores de los diferentes cosenos se pueden calcular así: si considerамos la curva coordenada u el vector tangente tiene por expresión

$$\frac{\partial x}{\partial u}\vec{i} + \frac{\partial y}{\partial u}\vec{j} + \frac{\partial z}{\partial u}\vec{k}$$

y los cosenos de los ángulos que forma este vector con los ejes coordenados se obtienen dividiendo las respectivas componentes por el módulo que es $e_1$ según (4). Luego podemos escribir:

$$\cos(xu) = \frac{1}{e_1}\cdot\frac{\partial x}{\partial u}\ ,,\quad \cos(yu) = \frac{1}{e_1}\cdot\frac{\partial y}{\partial u}\ ,,\quad \cos(zu) = \frac{1}{e_1}\cdot\frac{\partial z}{\partial u}$$

y análogamente

$$\cos(xv) = \frac{1}{e_2}\cdot\frac{\partial x}{\partial v}\ ,,\quad \cos(yv) = \frac{1}{e_2}\cdot\frac{\partial y}{\partial v}\ ,,\quad \cos(zv) = \frac{1}{e_2}\cdot\frac{\partial z}{\partial v}$$

$$\cos(xw) = \frac{1}{e_3}\cdot\frac{\partial x}{\partial w}\ ,,\quad \cos(yw) = \frac{1}{e_3}\cdot\frac{\partial y}{\partial w}\ ,,\quad \cos(zw) = \frac{1}{e_3}\cdot\frac{\partial z}{\partial w} \qquad (7)$$

11.- Expresión del gradiente en curvilíneas.-

Como aplicación calculemos las componentes en el sistema curvilíneo, del vector grad U. Para ello recordemos que la derivada direccional de U según una cierta recta es igual a la proyección del grad U sobre dicha recta ó bien apliquemos (6). Según esto se tiene:

$$(\overrightarrow{\text{grad}}\ U)_u = \frac{\partial U}{\partial x}\cos(xu) + \frac{\partial U}{\partial y}\cos(yu) + \frac{\partial U}{\partial z}\cos(zu) = \frac{\partial U}{\partial x}\frac{1}{e_1}\frac{\partial x}{\partial u} + \frac{\partial U}{\partial y}\frac{1}{e_1}\frac{\partial y}{\partial u} +$$

$$+ \frac{\partial U}{\partial z}\frac{1}{e_1}\frac{\partial z}{\partial u} = \frac{1}{e_1}\frac{\partial U}{\partial u}$$

y de forma análoga se obtienen las otras dos componentes. En resumen:

$$(\overrightarrow{\text{grad } U})_u = \frac{1}{e_1}\frac{\partial U}{\partial u}, \quad (\overrightarrow{\text{grad } U})_v = \frac{1}{e_2}\frac{\partial U}{\partial v}, \quad (\overrightarrow{\text{grad } U})_w = \frac{1}{e_3}\frac{\partial U}{\partial w} \tag{8}$$

Si designamos por $\vec{i}_1, \vec{i}_2, \vec{i}_3$ vectores unitarios tangentes a las tres curvas coordenadas se puede escribir:

$$\overrightarrow{\text{grad } U} = \frac{1}{e_1}\frac{\partial U}{\partial u}\vec{i}_1 + \frac{1}{e_2}\frac{\partial U}{\partial v}\vec{i}_2 + \frac{1}{e_3}\frac{\partial U}{\partial w}\vec{i}_3 \tag{9}$$

y por tanto la expresión simbólica del operador "nabla" en coordenadas curvilíneas es:

$$\vec{\nabla} = \frac{\vec{i}_1}{e_1}\cdot\frac{\partial}{\partial u} + \frac{\vec{i}_2}{e_2}\cdot\frac{\partial}{\partial v} + \frac{\vec{i}_3}{e_3}\cdot\frac{\partial}{\partial w} \tag{10}$$

Así por ejemplo en coordenadas cilíndricas $x = r\cos\varphi$, $y = r\,\text{sen}\,\varphi$,, $z = z$ resulta:

$e_1^2 = \cos^2\varphi + \text{sen}^2\varphi = 1$, $e_2^2 = r^2(\text{sen}^2\varphi + \cos^2\varphi) = r^2$, $e_3^2 = 1$. o sea $e_1 = 1$, $e_2 = r$, $e_3 = 1$, con lo cual:

$$\overrightarrow{\text{grad } U} = \frac{\partial U}{\partial r}\vec{i}_1 + \frac{1}{r}\cdot\frac{\partial U}{\partial \varphi}\vec{i}_2 + \frac{\partial U}{\partial z}\vec{i}_3$$

De manera similar se obtendría en coordenadas esféricas:

$x = r\cos\vartheta\,\text{sen}\,\varphi$,, $y = r\,\text{sen}\,\vartheta\,\text{sen}\,\varphi$,, $z = r\cos\varphi$, resulta:

$e_r = 1$,, $e_\varphi = r$,, $e_\vartheta = r\,\text{sen}\,\varphi$ con lo cual.

$$\overrightarrow{\text{grad } U} = \frac{\partial U}{\partial r}\vec{i}_r + \frac{1}{r}\frac{\partial U}{\partial \varphi}\vec{i}_\varphi + \frac{1}{r\,\text{sen}\,\varphi}\frac{\partial U}{\partial \vartheta}\vec{i}_\vartheta$$

12.- Divergencia de un vector en curvilíneas.-

Utilizaremos el teorema de Ostrogradsky-Gauss aplicado al "paralelepípedo" elemental de la figura, de una manera intuitiva pero suficiente para nuestro propósito.

La integral triple de la divergencia del vector $\overline{V}$ se puede escribir como igual a div $\overline{V}$ por el volúmen $e_1\, e_2\, e_3$ du dv dw del "paralelepípedo" elemental.

Calcularemos el flujo del vector sobre parejas de capas opuestas; así por ejemplo la diferencia entre el flujo del vector $\vec{V}$ sobre la cara ABED y sobre la cara opuesta PCFG es igual a $\frac{\partial}{\partial u}(e_2\, e_3\, V_u)$ du dv dw, y del mismo modo se obtiene para los otros dos pares de caras opuestas, luego:

$$\operatorname{div} \vec{V} = \frac{1}{e_1 \; e_2 \; e_3} \left[ \frac{\partial}{\partial u} (e_2 e_3 V_u) + \frac{\partial}{\partial v} (e_3 \; e_1 \; V_v) + \frac{\partial}{\partial w} (e_1 e_2 V_w) \right] \tag{11}$$

Como ejercicio pueden obtenerse las siguientes expresiones:

En coordenadas cilíndricas

$$\operatorname{div} \vec{V} = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r \; V_r) + \frac{1}{r} \frac{\partial V_\varphi}{\partial \varphi} + \frac{\partial V_z}{\partial z}$$

En coordenadas esféricas

$$\operatorname{div} \vec{V} = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} (r^2 V_r) + \frac{1}{r \operatorname{sen} \varphi} \frac{\partial}{\partial \varphi} (V_\varphi \operatorname{sen} \varphi) + \frac{1}{r \operatorname{sen} \varphi} \cdot \frac{\partial V_\theta}{\partial \theta}$$

13.- <u>El rotacional en curvilíneas.</u>-

La aplicación del teorema de Stokes a la cara PCFG nos va a dar la componente del vector $\overrightarrow{\text{rot } V}$ en la dirección de la tangente a la curva $\underline{u}$.

Se tiene en efecto:

Circulación de $\vec{V}$ a lo largo de $\widehat{PC} = V_v \; . \; e_2 \; . \; dv$

Id. a lo largo de $\widehat{CF} = V_w \; . \; e_3 \; . \; dw + \frac{\partial}{\partial v} (V_w . e_3 . dw) dv$

Id. a lo largo de $\widehat{FG} = - \left[ V_v . e_2 . dv + \frac{\partial}{\partial w} (V_v . e_2 . dv) dw \right]$

Id. a lo largo de $\widehat{GP} = - \; V_w \; . \; e_3 \; . \; dw$

El flujo del rotacional sobre la cara PCFG vale $(\overrightarrow{\text{rot } V})_u . e_2 . e_3 . dv . dw$ - luego:

$$(\overrightarrow{\text{rot } V})_u = \frac{1}{e_2 e_3} \left[ \frac{\partial}{\partial v} (e_3 V_w) - \frac{\partial}{\partial w} (e_2 V_v) \right]$$

Por permutación circular podemos escribir:

$$(\overrightarrow{\text{rot } V})_v = \frac{1}{e_3 e_1} \left[ \frac{\partial}{\partial w} (e_1 V_u) - \frac{\partial}{\partial u} (e_3 \; V_w) \right]$$

$$(\overrightarrow{\text{rot } V})_w = \frac{1}{e_1 e_2} \left[ \frac{\partial}{\partial u} (e_2 V_v) - \frac{\partial}{\partial V} (e_1 V_u) \right]$$

Estos resultados se pueden escribir reunidos de la siguiente manera:

$$\overrightarrow{\text{rot } V} = \frac{1}{e_1 e_2 e_3} \begin{vmatrix} e_1 \vec{i}_1 & e_2 \vec{i}_2 & e_3 \vec{i}_3 \\ \frac{\partial}{\partial u} & \frac{\partial}{\partial v} & \frac{\partial}{\partial w} \\ e_1 V_u & e_2 V_v & e_3 V_w \end{vmatrix} \tag{12}$$

Así por ejemplo, en coordenadas cilíndricas se obtiene:

$$\overrightarrow{\text{rot } V} = \frac{1}{r} \begin{vmatrix} \vec{i}_r & r \vec{i}_\varphi & \vec{i}_z \\ \frac{\partial}{\partial r} & \frac{\partial}{\partial \varphi} & \frac{\partial}{\partial z} \\ V_r & V_\varphi & V_z \end{vmatrix}$$

y en coordenadas esféricas resultaría:

$$\overrightarrow{\text{rot } V} = \frac{1}{r^2 \operatorname{sen}^2 \varphi} \begin{vmatrix} \vec{i}_r & r \vec{i}_\varphi & r \operatorname{sen}\varphi \, \vec{i}_\vartheta \\ \frac{\partial}{\partial r} & \frac{\partial}{\partial \varphi} & \frac{\partial}{\partial \vartheta} \\ V_r & r V_\varphi & r \operatorname{sen}\varphi \, V_\vartheta \end{vmatrix}$$

14.- Expresión de la laplaciana en curvilíneas.-

Si se sustituye en (11) $\overline{V}$ por $\overrightarrow{\text{grad } U}$ se obtiene:

$$\Delta U = \frac{1}{e_1 e_2 e_3} \left[ \frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{e_2 e_3}{e_1} \frac{\partial U}{\partial u}\right) + \frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{e_3 e_1}{e_2} \frac{\partial U}{\partial v}\right) + \frac{\partial}{\partial w}\left(\frac{e_1 e_2}{e_3} \frac{\partial U}{\partial w}\right) \right. \tag{13}$$

Como aplicación, en coordenadas cilíndricas resulta:

$$\Delta U = \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial}{\partial r}\left(r \frac{\partial U}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2} \cdot \frac{\partial^2 U}{\partial \varphi^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial z^2}$$

En coordenadas esféricas:

$$\Delta U = \frac{1}{r^2} \cdot \frac{\partial}{\partial r}\left(r^2 \cdot \frac{\partial U}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2 \operatorname{sen}\varphi} \cdot \frac{\partial}{\partial \varphi}\left(\operatorname{sen}\varphi \frac{\partial U}{\partial \varphi}\right) + \frac{1}{r^2 \operatorname{sen}^2 \varphi} \cdot \frac{\partial^2 U}{\partial \vartheta^2}$$

Todos estos resultados serán de aplicación constante en diversas materias especialmente en la teoría de campos.

# 9

# Ecuaciones Diferenciales Ordinarias. Diferentes Tipos de Primer Orden

## L E C C I O N  9

## ECUACIONES DIFERENCIALES ORDINARIAS. DIFERENTES TIPOS DE PRIMER ORDEN

### 1.- Definiciones generales.-

Se llama ecuación diferencial a toda ecuación que relaciona una cierta función incógnita, la variable o variables independientes y alguna derivada al menos de dicha función. Cuando hay una sóla variable independiente la ecuación se llama ordinaria, mientras que si hay varias, se llama ecuación en derivadas parciales.

Orden de una ecuación diferencial es el mayor orden de derivación de la función que figure en la ecuación. Una ecuación diferencial ordinaria de orden n se escribiría así:

$$F(x, y, \frac{dy}{dx}, \frac{d^2y}{dx^2}, \ldots, \frac{d^ny}{dx^n}) = 0 \qquad (1)$$

Se llama solución de la ecuación diferencial (1), a toda función $y=y(x)$ definida en un dominio I, tal que para todo valor de $x$ perteneciente a I se tenga

$$F[x, y(x), y'(x), y''(x), \ldots y^{(n}(x)] = 0$$

A la gráfica de cada solución, se le llama curva integral de la ecuación considerada.

En esta lección, vamos a estudiar solamente ecuaciones diferenciales ordinarias de primer orden, o sea de la forma

$$F(x, y, \frac{dy}{dx}) = 0 \qquad (2)$$

Estas ecuaciones, geométricamente, relacionan en cada punto la abscisa, la ordenada y la pendiente de toda curva integral que represente a una solución de la ecuación diferencial (2).

Cuando la ecuación diferencial se escribe con la $y'$ despejada, o sea de la forma

$$y' = f(x, y) \qquad (3)$$

decimos que está en la forma normal.

El problema que se plantea es encontrar todas las curvas que satisfacen (3) y que llamaremos haz integral de (3). Para ello se debe estudiar previamente su existencia y unidad como se expresa a continuación.

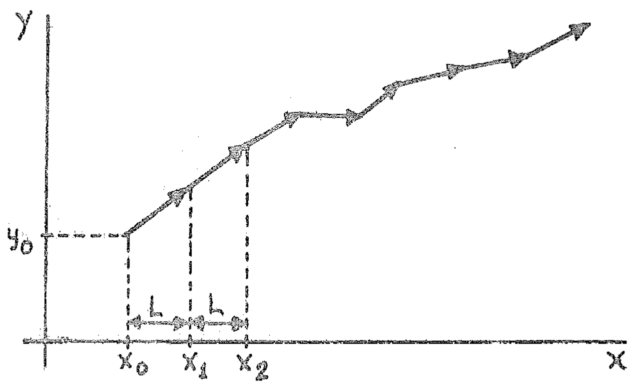
2.- Teoremas de existencia y unicidad de la solución de la ecuación $y' = f(x, y)$.-

El conjunto de las ecuaciones diferenciales integrables mediante cuadraturas está sumamente limitado; por ello tienen gran importancia los métodos aproximados en la teoría de ecuaciones diferenciales. Actualmente, con el rápido desarrollo de la técnica del cálculo, los métodos de aproximación adquieren un valor superior, siendo a menudo conveniente utilizar dichos métodos aún en los casos en que las ecuaciones se integren mediante cuadraturas.

Sin embargo, para aplicar cualquier método de integración aproximada de la ecuación diferencial, hay que estar seguro ante todo de la existencia de la solución buscada, así como de la unicidad de la misma, ya que cuando no tiene lugar la unicidad, no queda determinada con claridad cuál es la solución que se desea aproximar.

Frecuentemente, la demostración de teoremas de existencia de la solución proporciona métodos para la determinación de la solución exacta o aproximada. Por ejemplo, el teorema de existencia y unicidad de la solución que veremos más adelante, nos da los fundamentos del metodo de los polígonos de Euler para la integración aproximada de ecuaciones diferenciales.

Este método consiste en que la curva integral buscada de la ecuación diferencial $y' = f(x, y)$, que pasa por el punto $(x_0, y_0)$, se sustituye por una línea poligonal formada por segmentos que cumplen la condición de ser cada uno de ellos tangente a la curva integral en uno de sus puntos extremos.




Si queremos hallar el valor aproximado de la solución buscada $y(x)$ en el punto $x = b$, dividimos el segmento $[x_0, b]$, $(b > x_0)$, en n partes iguales obteniendo los puntos de abscisas $x_0, x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}, x_n = b$; $x_{i+1} - x_i = h$.

Si llamamos $y_i$ al valor aproximado de la solución $y(x)$ en cada punto $x_i$

y sustituimos en cada intervalo $[x_{i-1}, x_i]$ la curva buscada por el segmento de su tangente en el extremo $(x_{i-1}, y_{i-1})$, se tendrá:

$$y_1 = y_0 + h \cdot y'_0, \text{ siendo } y'_0 = f(x_0, y_0)$$

Análogamente:

$$y_2 = y_1 + h\, y'_1 \quad ; \quad y'_1 = f(x_1, y_1)$$
$$y_3 = y_2 + h\, y'_2 \quad ; \quad y'_2 = f(x_2, y_2)$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$y_n = y_{n-1} + h \cdot y'_{n-1} \quad ; \quad y'_{n-1} = f(x_{n-1}, y_{n-1})$$

Si $b < x_0$, se efectuaría el mismo cálculo tomando valores de h negativos

Cuando $h \longrightarrow 0$, el polígono de Euler así construido, se aproximará a la gráfica de la curva integral buscada. Así pues, el método de Euler dará un valor cada vez más exacto de la solución en el punto b, a medida que disminuyamos h. La demostración de esta afirmación nos conduce al mismo tiempo al siguiente teorema fundamental de existencia y unicidad de la solución de la ecuación diferencial $y' = f(x, y)$ con la condición inicial $y(x_0) = y_0$, bajo condiciones suficientes muy amplias exigidas a la función $f(x, y)$.

## 2.1.- Teorema de existencia y unicidad de la solución.-

Dada la ecuación diferencial $y' = f(x, y)$, si se cumplen las siguientes condiciones:

a) La función $f(x, y)$ es continua en el rectángulo R:

$$x_0 - a \leqslant x \leqslant x_0 + a \quad ; \quad y_0 - b \leqslant y \leqslant y_0 + b$$

b) La función $f(x, y)$ es lipschiciana en R respecto de y, ó sea satisfac las condiciones de Lipschitz, lo que quiere decir que, existe un número positivo K, llamado constante de Lipschitz, tal que para todo par de puntos de R de una misma vertical $(x, y_1)$, $(x, y_2)$ se tiene:

$$\left| \frac{f(x, y_2) - f(x, y_1)}{y_2 - y_1} \right| \leqslant K$$

o lo que es lo mismo

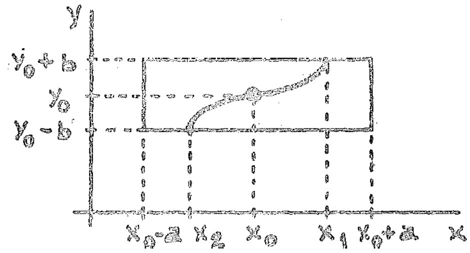
$$| f(x, y_2) - f(x, y_1) | \leqslant K \, | y_2 - y_1 |$$

con estas dos hipótesis para $f(x, y)$, el teorema dice que existe una solución única $y = \bar{y}(x)$, $x_0 - H \leq x \leq x_0 + H$ de la ecuación diferencial dada, que satisface la condición inicial $y(x_0) = y_0$, siendo:

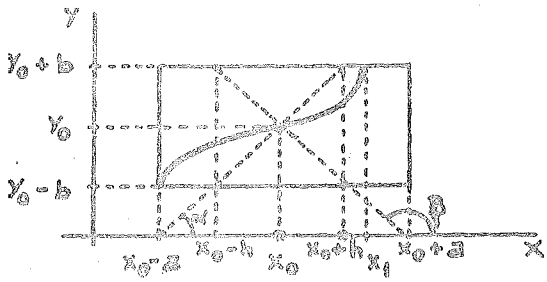
$$M = \text{máx.} \, |f(x, y)| \text{ en } R$$

$$H < \text{mín.}\left(a, \frac{b}{M}, \frac{1}{K}\right)$$

Antes de proceder a su demostración, aclaremos alguna de las condiciones del teorema. No se puede afirmar que la solución buscada $y = \bar{y}(x)$, con la condición $y(x_0) = y_0$, existirá para $x_0 - a \leq x \leq x_0 + a$, pues la curva integral $y = \bar{y}(x)$ puede salir del rectángulo R por sus lados superior e inferior $y = y_0 \pm b$ para cierto valor $x = x_1$, $x_0 - a < x_1 < x_0 + a$, en cuyo caso, si $x_1 > x_0$, para $x > x_1$ la solución puede no estar definida (si $x_1 < x_0$, la solución puede no estar definida para $x < x_1$). Se puede asegurar que la curva integral $y = \bar{y}(x)$ no sale de




los límites de R cuando x varía en el segmento $x_0 - H \leq x \leq x_0 + H$, siendo H el menor de los números a y $\frac{b}{M}$, ya que el coeficiente angular de la tangente a la curva integral buscada se encuentra entre los coeficientes angulares $\operatorname{tg} \alpha = M$ y $\operatorname{tg} \beta = -M$ de las rectas de la figura. Si estas rectas, entre las que está la curva integral buscada, salen de los límites del rectángulo R por sus lados superior o inferior $y = y_0 \pm b$, las abscisas de los puntos de corte de estos lados serán $x_0 \pm \frac{b}{M}$. Así pues, la abscisa del punto de salida de la curva integral del rec-



tángulo R estará comprendida entre $x_0 - \frac{b}{M}$ y $x_0 + \frac{b}{M}$.

Aunque se puede demostrar la existencia de la solución buscada en el segmento $x_0 - H \leqslant x \leqslant x_0 + H$, siendo $H = \text{mín}\ (a, \frac{b}{M})$, es más sencillo demostrar antes la existencia de la solución en el segmento $x_0 - H \leqslant x \leqslant x_0 + H$, siendo $H < \text{mín}\ (a, \frac{b}{M}, \frac{1}{K})$.

La condición de Lipschitz:

$$|f(x, y_2) - f(x, y_1)| \leqslant K\ |y_2 - y_1|$$

Se puede sustituir por otra menos rigurosa, pero más fácil de comprobar y que consiste en la existencia de la derivada parcial acotada $f'_y(x, y)$ en R.

En efecto, si se tiene en R: $|f'_y(x, y)| \leqslant K$ aplicando el teorema de los incrementos finitos, queda:

$$|f(x, y_2) - f(x, y_1)| = |f'_y(x, \xi)| \cdot |y_2 - y_1|$$

$y_1 \leqslant \xi \leqslant y_2$ luego $(x, \xi)$ está en R y se cumple

$$|f'_y(x, \xi)| \leqslant K \quad y \quad |f(x, y_2) - f(x, y_1)| \leqslant K\ |y_2 - y_1|$$

Veamos ahora la demostración de existencia y unicidad.

La ecuación diferencial: $y' = f(x, y)$

con la condición inicial $y(x_0) = y_0$, se ve de modo trivial que puede sustituirse por la ecuación integral correspondiente

$$y = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(x, y)dx$$

Construimos la poligonal de Euler $y=y_n(x)$ partiendo del punto $(x_0, y_0)$ y tomando $h_n = \frac{H}{n}$ en el segmento $x_0 \leqslant x \leqslant x_0 + H$, siendo n un entero positivo. La poligonal de Euler que pasa por $(x_0, y_0)$ no puede salir de R para $x_0 \leqslant x \leqslant x_0 + H$ (o bien $x_0 - H \leqslant x \leqslant x_0$), ya que el coeficiente angular de cada segmento de la poligonal es menor que M en valor absoluto.

Demostremos ahora las tres proposiciones siguientes:

a) La sucesión $y_n = y_n(x)$ es uniformemente convergente.

b) La función $\overline{y}(x) = \lim_{n \to \infty} y_n(x)$ es la solución de la ecuación integral anterior.

c) La solución $\overline{y}(x)$ de dicha ecuación integral es única.

Para demostrar (a), escribamos teniendo en cuenta la definición de poligonal de Euler,

$$y'_n(x) = f(x_K, y_K), \text{ para } x_K \leqslant x \leqslant x_{K+1}, \ K = 0, 1, \ldots, n-1$$

o también:

$$y'_n(x) = f(x, y_n(x)) + [f(x_K, y_K) - f(x, y_n(x))]$$

llamamos:

$$(x) = f(x_K, y_K) - f(x, y_n(x))$$

Como la función $f(x, y)$ es uniformemente continua en R:

$$|\eta_n(x)| = |f(x_K, y_K) - f(x, y_n(x))| \leqslant \varepsilon_n$$

si $n > K(\varepsilon_n)$, donde $\varepsilon \to 0$ cuando $n \to \infty$, ya que $|x - x_K| \leqslant h_n$ y $|y_K - y_n(x)| < M \cdot h_n$, siendo $h_n = \frac{H}{n} \to 0$, cuando $n \to \infty$.

Integrando la expresión anterior de $y'_n(x)$ con respecto a $x$, entre $x_0$ y $x$, y recordando que $y_n(x_0) = y_0$, queda:

$$y_n(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(t, y_n(t))dt + \int_{x_0}^{x} \eta_n(t)dt$$

donde n puede tomar cualquier valor entero positivo; para un entero $m > 0$ se tendrá:

$$y_{n+m}(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(t, y_{n+m}(t))dt + \int_{x_0}^{x} \eta_{n+m}(t)dt$$

Restando estas dos últimas igualdades

$$|y_{n+m}(x) - y_n(x)| = \left| \int_{x_0}^{x} [f(t, y_{n+m}(t)) - f(t, y_n(t))] dt + \right.$$

$$\left. + \int_{x_0}^{x} \eta_{n+m}(t)dt - \int_{x_0}^{x} \eta_n(t)dt \right| \leqslant$$

$$\leqslant \int_{x_0}^{x} |f(t, y_{n+m}(t) - f(t, y_n(t))| \ dt + \int_{x_0}^{x} |\eta_{n+m}(t)| dt + \int_{x_0}^{x} |\eta_n(t)| \ dt$$

si $x_0 \leqslant x \leqslant x_0 + H$, y teniendo en cuenta la condición de Lipschitz y la **acotación** de $|\eta_n(x)|$ queda:

$$|y_{n+m}(x) - y_n(x)| \leqslant K \int_{x_0}^{x} |y_{n+m}(t)-y_n(t)|\,dt+(\varepsilon_{n+m}+\varepsilon_n)H$$

y por lo tanto:

$$\max_{x_0 \leqslant x \leqslant x_0+H} |y_{n+m}(x)-y_n(x)| \leqslant K.\max \int_{x_0}^{x} |y_{n+m}(t)-y_n(t)|\,dt+(\varepsilon_{n+m}+\varepsilon_n).H$$

de donde:

$$\max_{x_0 \leqslant x \leqslant x_0 + H} |y_{n+m}(x) - y_n(x)| \leqslant \frac{(\varepsilon_{n+m}+\varepsilon_n).H}{1 - KH} < \varepsilon$$

para todo $\varepsilon \to 0$ y para un valor de n suficientemente grande $n > K_1(\varepsilon)$.

Así pues:

$$\max_{x_0 \leqslant x \leqslant x_0+H} |y_{n+m}(x)-y_n(x)| < \varepsilon$$

para $n > K_1(\varepsilon)$, o sea, la sucesión de funciones continuas $y_n(x)$ es **uniformemente** convergente en $x_0 \leqslant x \leqslant x_0 + H$:

$$y_n(x) \to \overline{y}(x)$$

siendo $\overline{y}(x)$ una función continua en R.

Para demostrar (b), tomemos límite en la expresión vista de $y_n$, cuando $n \to \infty$.

$$y_n(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(t, y_n(t))dt + \int_{x_0}^{x} \eta_n(t)dt$$

$$\lim_{n \to \infty} y_n(x) = y_0 + \lim_{n \to \infty} \int_{x_0}^{x} f(x, y_n(x))dx + \lim_{n \to \infty} \int_{x_0}^{x} \eta_n(x)dx$$

o lo que es lo mismo:

$$\overline{y}(x) = y_0 + \lim_{n \to \infty} \int_{x_0}^{x} f(x, y_n(x))dx + \lim_{n \to \infty} \int_{x_0}^{x} \eta_n(x)dx$$

Como $y_n(x)$ converge uniformemente a $\overline{y}(x)$ y la función $f(x,y)$ es uniformemente continua en R, la sucesión

$$f(x,\ y_n(x)) \longrightarrow f(x,\ \overline{y}(x))$$

Ya que:

$$|f(x,\overline{y}(x)) - f(x,y_n(x))| < \varepsilon$$

siendo $\varepsilon > 0$, si $|\overline{y}(x) - y_n(x)| < \delta(\varepsilon)$; pero $|\overline{y}(x) - y_n(x)| < \delta(\varepsilon)$, si $n > K_1(\delta(\varepsilon))$ para todo x tal que $x_0 \leqslant x \leqslant x_0 + H$.

Así pues, $|f(x,\ \overline{y}(x)) - f(x,y_n(x))| < \varepsilon$ para $n > K_1(\delta(\varepsilon))$, donde $K_1$, no depende de x.

Por la convergente uniforme de la sucesión $f(x,\ y_n(x))$ a $f(x,\ \overline{y}(x))$ se puede permutar el tomar límites con el símbolo integral, y recordando además que $|\eta_n(x)| < \varepsilon_n$, donde $\varepsilon_n \longrightarrow 0$ cuando $n \longrightarrow \infty$, queda:

$$\overline{y}(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(x,\overline{y}(x))dx$$

Así pues, $\overline{y}(x)$ satisface a la ecuación integral que correspondía a la ecuación diferencial.

Para demostrar (c), supongamos que la ecuación diferencial admite dos soluciones distintas $y_1(x)$ é $y_2(x)$. Se tendrá

$$\max_{x_0 \leqslant x \leqslant x_0 + H} |y_1(x) - y_2(x)| \neq 0$$

Escribamos las identidades:

$$\left.\begin{aligned} y_1(x) &= y_0 + \int_{x_0}^{x} f(x,\ y_1(x))dx \\ y_2(x) &= y_0 + \int_{x_0}^{x} f(x,\ y_1(x))dx \end{aligned}\right\}$$

restándolas se obtiene:

$$y_1(x) - y_2(x) = \int_{x_0}^{x} [f(x, y_1(x)) - f(x, y_2(x))]\, dx \quad \text{y por lo tanto}$$

$$\max_{x_0 \leqslant x \leqslant x_0 + H} |y_1(x) - y_2(x)| = \max_{x_0 \leqslant x \leqslant x_0 + H} \left| \int_{x_0}^{x} [f(x, y_1(x)) - f(x, y_2(x))]\, dx \right| \leqslant$$

$$\leqslant \max_{x_0 \leqslant x \leqslant x_0 + H} \left| \int_{x_0}^{x} |f(x, y_1(x)) - f(x, y_2(x))|\, dx \right|$$

y aplicando la condición de Lipschitz se obtiene:

$$\max_{x_0 \leqslant x \leqslant x_0 + H} |y_1(x) - y_2(x)| \leqslant K \max_{x_0 \leqslant x \leqslant x_0 + H} \left| \int_{x_0}^{x} |y_1(x) - y_2(x)|\, dx \right| \leqslant$$

$$\leqslant K \max_{x_0 \leqslant x \leqslant x_0+H} |y_1(x) - y_2(x)| \cdot \max_{x_0 \leqslant x \leqslant x_0+H} \left| \int_{x_0}^{x} dx \right| =$$

$$= K H \max_{x_0 \leqslant x \leqslant x_0} |y_1(x) - y_2(x)|$$

La desigualdad así obtenida:

$$\max_{x_0 \leqslant x \leqslant x_0 + H} |y_1(x) - y_2(x)| \leqslant K H \max_{x_0 \leqslant x \leqslant x_0+H} |y_1(x) - y_2(x)|$$

es contradictoria si $\max\limits_{x_0 \leqslant x \leqslant x_0 + H} |y_1(x) - y_2(x)| \neq 0$, ya que por la hipótesis del teorema $H < \frac{1}{K}$ y de arriba se deduce que $KH \geqslant 1$.

La contradicción cesa únicamente si se cumple:

$$\max_{x_0 \leqslant x \leqslant x_0 + H} |y_1(x) - y_2(x)| = 0$$

ó sea, si $y_1(x) = y_2(x)$ para $x_0 \leqslant x \leqslant x_0 + H$.

La existencia de la solución de la ecuación se podría demostrar de otra forma, exigiendo la continuidad de $f(x, y)$ en R (sin la condición de Lipschitz); sin embargo, esta condición no es suficiente para demostrar la unidad de la solución.

La existencia y la unicidad de la solución $y = y(x)$ se han demostrado en el intervalo $x_0 - H \leqslant x \leqslant x_0 + H$. Tomando el punto $(x_0 + H, y(x_0 + H))$ como inicial, se puede repetir el razonamiento anterior y continuar la solución en un segmento más de longitud $H_1$, si en un entorno del nuevo punto inicial se cumplen -

las condiciones del teorema de existencia y unicidad de la solución. Repitiendo este proceso se puede continuar la solución en todo el semieje $x \geq x_0$ e incluso en todo el eje real $-\infty < x < \infty$.

Es posible que la curva integral no pueda ser continuada debido al acercamiento a un punto donde no se cumplan las condiciones del teorema de existencia y unicidad de la solución, o a que la curva integral se aproxime a una asíntota vertical.

Modernamente, los teoremas de existencia y unicidad de las soluciones no sólo de ecuaciones diferenciales, sino también de otros tipos de ecuaciones, se suelen demostrar frecuentemente por <u>el método de los puntos fijos</u>. Uno de los teoremas más sencillos sobre puntos fijos es el <u>principio de las transformaciones de contracción</u> ó principio de Cacciopolli-Banach que dice lo siguiente:

Si en un espacio métrico completo M está dado un operador A, que satisface las siguientes condiciones:

a) El operador A transforma los puntos del espacio M en puntos del mismo espacio; si $y \in M$, se tiene que $A[y] \in M$.

b) El operador A acerca los puntos; ó sea:

$$\varrho(A[y], A[z]) \leq \alpha\, \varrho(y, z)$$

donde $y$ y $z$ son puntos cualesquiera del espacio M; $\alpha < 1$ y no depende de la elección de $y$ y de $z$; $\varrho(y,z)$ es la distancia entre los puntos $y$ y $z$ en el espacio M, entonces existe un único punto fijo $\bar{y}$ del espacio M, $A[\bar{y}] = \bar{y}$. Este punto puede hallarse por el método de las aproximaciones sucesivas, es decir, $\bar{y} = \lim_{n \to \infty} y_n$, donde $y_n = A[y_{n-1}]$, $n = 1, 2, \ldots$: el punto $y_0$ se escoge arbitrariamente en el espacio M.

Recuérdese que un espacio M se llama métrico, si en él está definida una función $\varrho(y,z)$ de un par de puntos de dicho espacio que satisface, para puntos arbitrarios y, z y u de éste, las condiciones:

a) $\varrho(y,z) \geq 0$ y también si $\varrho(y,y) = 0$ y $\varrho(y,z) = 0$, se tiene $y = z$.

b) $\varrho(y,z) = \varrho(z,y)$.

c) $\varrho(y,z) \leq \varrho(y,u) + \varrho(u,z)$ (desigualdad triangular). La función $\varrho$ se llama distancia en el espacio M.

Un espacio métrico M se llama completo, si cada sucesión fundamental de puntos del espacio M converge en éste. Recuérdese también que la sucesión $y_1, y_2, \ldots, y_n, \ldots$ se llama fundamental si para cada $\varepsilon > 0$ existe un número $N(\varepsilon)$, tal que para $n \geq N(\varepsilon)$ la distancia $\varrho(y_n, y_{n+m}) < \varepsilon$ para cualquier número entero $m > 0$.

## 2.2.- Teorema de existencia y unicidad de la solución de un sistema de ecuaciones diferenciales de primer orden.-

Sea el sistema de ecuaciones diferenciales

$$\frac{dy_i}{dx} = f_i(x, y_1, y_2, \ldots, y_n); \; y_i(x_0) = y_{i0}, \quad (i = 1, 2, \ldots, n)$$

o lo que es lo mismo:

$$y_i = y_{i0} + \int_{x_0}^{x} f_i(x, y_1, y_2, \ldots, y_n)dx, \quad (i = 1, 2, \ldots, n)$$

y supongamos que en la región R, definida así:

$$x_0 - a \leqslant x \leqslant x_0 + a; \; y_{i0} - b_i \leqslant y_i \leqslant y_{i0} + b_i, \quad (i = 1, 2, \ldots, n)$$

se cumplen las siguientes condiciones:

a) Todas las funciones $f_i(x, y_1, y_2, \ldots, y_n)$, $(i = 1, 2, \ldots, n)$, son continuas y por lo tanto acotadas en R: $|f_i| \leqslant M$.

b) Todas las funciones $f_i$, $(i = 1, 2, \ldots, n)$, satisfacen la condición de Lipschitz:

$$|f_i(x, y_1, y_2, \ldots y_n) - f_i(x, z_1, z_2, \ldots, z_n)| \leqslant K. \sum_{i=1}^{n} |y_i - z_i|$$

En un espacio métrico completo C, a todo punto le corresponde una función vectorial n-dimensional $Y(x)$ de componentes $y_1(x), \; y_2(x), \ldots, y_n(x)$, definida en el segmento $x_0 - h_0 \leqslant x \leqslant x_0 + h_0$, siendo $h_0 \leqslant \min(a, \; b_1/M, \ldots, b_n/M)$.

La distancia en el espacio C se define así:

$$\varrho(Y(x), \; Z(x)) = \sum_{i=1}^{n} \text{máx} |y_i - z_i|$$

siendo $z_1, z_2, \ldots, z_n$ las coordenadas de la función vectorial $Z(x)$. Esta definición de distancia nos permite decir que el conjunto C de funciones vectoriales n-dimensiones $Y(x)$ es un espacio métrico completo. El operador A se define por la expresión:

$$A[Y] = (y_{10} + \int_{x_0}^{x} f_1(x, y_1, y_2, \ldots, y_n)dx, \; y_{20} + \int_{x_0}^{x} f_2(x, y_1, y_2, \ldots y_n)dx, \ldots, \; y_{n0} +$$

$$+ \int_{x_0}^{x} f_n(x, y_1, y_2, \ldots, y_n)dx)$$

El punto A [Y] pertenece al espacio C, ya que todas sus coordenadas son funciones continuas en R, si las coordenadas de la función vectorial Y pertenecen a R.

En efecto:

$$\left|\int_{x_0}^{x} f_i(x, y_1, y_2, \ldots, y_n)dx\right| \leqslant M \left|\int_{x_0}^{x} dx\right| \leqslant M.h_0 \leqslant b_i$$

y por lo tanto:

$$|y_i - y_{i0}| \leqslant b_i$$

También se cumple la segunda condición del principio de las transformaciones de contracción:

$$Q(A[Y], A[Z]) = \sum_{i=1}^{n} \text{máx} \left|\int_{x_0}^{x} [f_i(x, y_1, y_2, \ldots, y_n) - f_i(x, z_1, z_2, \ldots, z_n)]dx\right| \leqslant$$

$$\leqslant \sum_{i=1}^{n} \text{máx} \left|\int_{x_0}^{x} |f_i(x, y_1, y_2, \ldots, y_n) - f_i(x, z_1, z_2, \ldots, z_n)]dx\right| \leqslant$$

$$\leqslant K. \sum_{i=1}^{n} \text{máx} \left|\int_{x_0}^{x} \sum_{i=1}^{n} |y_i - z_i| dx\right| \leqslant K. \sum_{i=1}^{n} \text{máx}|y_i - z_i| \sum_{i=1}^{n} \text{máx}\left|\int_{x_0}^{x} dx\right| =$$

$$= K.n.h_0 . Q(Y, Z)$$

Si elegimos un $h_0 \leqslant \frac{\alpha}{n.K}$, siendo $0 < \alpha < 1$, ó $K.n.h_0 \leqslant \alpha < 1$, se cumple la segunda condición del principio de las transformaciones de contracción, y por lo tanto existe un punto fijo $\overline{Y}$ único, que se puede hallar por el método de las aproximaciones sucesivas. Pero, por definición del operador A, la condición $\overline{Y} = \overline{y}_2 [\overline{Y}]$ equivale a las identidades

$$\overline{y}_i = y_{i0} + \int_{x_0}^{x} f_i(x, \overline{y}_1, \overline{y}_2, \ldots, \overline{y}_n)dx, \quad (i = 1, 2, \ldots, n)$$

siendo $\overline{y}_i$, $(i = 1, 2, \ldots, n)$ las coordenadas de la función vectorial $\overline{Y}$, o sea $\overline{Y}$ es la solución única del sistema inicial.

A continuación se estudian los principales casos particulares de ecuaciones diferenciales de primer orden.

## 3.- Ecuaciones de variables separadas.-

Se llaman así a las ecuaciones de la forma

$$P(x).dx = Q(y)\ dy$$

en donde $P(x)$ es función sólo de $x$, y $Q(y)$ es función sólo de $y$.

El haz integral se obtiene calculando la integral indefinida de cada miembro y sumando a uno de los dos miembros una constante de integración C.

$$\int P(x)\ dx = \int Q(y).dy + C$$

Ejemplos

a) Integrar $x^2(y+1)dx + y^2(x-1)dy = 0$

Se puede poner así

$$\frac{x^2}{x-1}dx + \frac{y^2}{y+1}\ dy = 0$$

$$(x+1+\frac{1}{x-1})dx + (y-1+\frac{1}{y+1})dy=0$$

Integrando queda:

$$\frac{1}{2}x^2 + x + L(x-1) + \frac{1}{2}\ y^2 - y + L(y+1) = \frac{C}{2}$$

$$x^2 + y^2 + 2x - 2y + 2L\ [(x-1)(y+1)] = C$$

b) Resolver $\frac{dy}{dx} + y \cos x = 0$

separando variables queda:

$$\frac{dy}{y} = -\cos x\ dx$$

Integrando

$$Ly = -\int \cos x\ dx + L\ C = -\operatorname{sen}x + LC$$

$$y = C.e^{-\operatorname{sen}x}$$

## 4.- Ecuaciones homogéneas.-

Se llaman así a las ecuaciones diferenciales que pueden expresarse en la forma:

$$\frac{dy}{dx} = f\left(\frac{y}{x}\right) \tag{4}$$

o sea no se alteran al sustituir x por kx e y por ky, por ser f una función homogénea de grado cero de x, y.

Para resolverlas efectuamos el cambio $\frac{y}{x} = u$, o sea $y = u.x$, $y' = u'x + u$.

Sustituyendo y e y' en (4) queda

$$\frac{du}{dx}.x + u = f(u)$$

$$\frac{du}{dx} \cdot x = f(u) - u$$

$$\frac{du}{f(u) - u} = \frac{dx}{x}$$

ecuación de variables separadas que integrándola nos da

$$\int \frac{du}{f(u) - u} = Lx + LC$$

Una vez calculada la integral del primer miembro se deshace el cambio poniendo $u = y/x$.

Ejemplos.

a) Integrar la ecuación diferencial

$$(2x.\mathrm{Sh}\,\frac{y}{x} + 3y.\mathrm{Ch}\,\frac{y}{x})dx - 3x.\mathrm{Ch}\,\frac{y}{x}\,dy = 0$$

Efectuamos el cambio $y = ux$, $dy = udx + xdu$

$$(2x.\mathrm{Sh}\,u + 3ux.\mathrm{Ch}\,u)dx - 3x.\mathrm{Ch}\,u(udx+xdu) = 0$$

Dividiendo por x y simplificando queda

$$2\mathrm{Sh}u.dx - 3x\,\mathrm{Ch}\,u\,du = 0$$

o sea

$$\frac{2dx}{x} = 3\,\frac{\mathrm{Ch}\,u}{\mathrm{Sh}\,u}\,du \quad \text{integrando se obtiene}$$

$$2Lx = 3L\,\mathrm{Sh}\,u + LC;\; x^2 = C.\mathrm{Sh}^3\,u$$

y deshaciendo el cambio

$$x^2 = C \, . \, Sh^3 \frac{y}{x}$$

b) Resolver $xdy - ydx = \sqrt{x^2 + y^2}\, dx$

Efectuamos el cambio $y = ux$, $dy = xdu + udx$

La ecuación queda

$$x(xdu + udx) - ux\, dx = \sqrt{x^2 + u^2 x^2}\, dx$$

$$xdu + udx - udx = \sqrt{1 + u^2}\, dx$$

$$\frac{du}{\sqrt{1+u^2}} = \frac{dx}{x} \quad \text{e integrando}$$

$$L(u + \sqrt{1+u^2}) = Lx + Lc = Lcx$$

$$u + \sqrt{1+u^2} = cx \; ; \quad \sqrt{1+u^2} = cx - u$$

$$1 + u^2 = c^2 x^2 + u^2 - 2\, cxu$$

$u = \dfrac{c^2 x^2 - 1}{2cx}$, deshaciendo el cambio $u = \dfrac{y}{x}$, queda $y = \dfrac{c^2 x^2 - 1}{2c} =$

$= \dfrac{c^2 x^2}{2} - \dfrac{1}{2c}$

$$y = \frac{c^2 x^2 - 1}{2c} = \frac{c}{2} x^2 - \frac{1}{2c}$$

5.- Ecuaciones reducibles a homogéneas.-

Se llaman así a las ecuaciones de la forma

$$\frac{dy}{dx} = f\left(\frac{ax + by + c}{a'x + b'y + c'}\right) \tag{5}$$

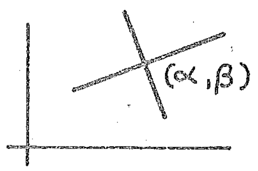
Si $c = c' = 0$, queda una ecuación homogénea de las estudiadas en el número anterior.

Supongamos que c ó c' no son nulos a la vez. Resolvamos el sistema

$$\left\{\begin{array}{l} ax + by + c = 0 \\ a'x + b'y + c' = 0 \end{array}\right\} \qquad (6)$$

Este sistema representa analíticamente dos rectas en el plano y pueden suceder los siguientes casos:

a) El sistema (6) es compatible y determinado. Las rectas que lo forman se cortan en único punto real $(\alpha, \beta)$.




Efectuamos una traslación del origen de coordenadas a dicho punto:

$$\left.\begin{array}{l} x = X + \alpha \\ y = Y + \beta \end{array}\right\} \begin{array}{l} dx = dX \\ dy = dY \end{array} \qquad \text{sustituyendo en 15) queda}$$

$$\frac{dY}{dX} = f\left(\frac{a(X+\alpha)+b(Y+\beta)+c}{a'(X+\alpha)+b'(Y+\beta)+c'}\right) = f\left(\frac{aX+bY}{a'X+b'Y}\right) = f\left(\frac{a+b\frac{Y}{X}}{a'+b'\frac{Y}{X}}\right) \quad \text{ya que:}$$

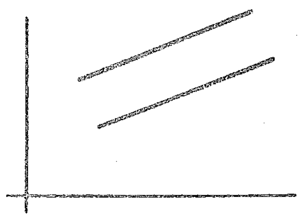
$$\left\{\begin{array}{l} a\alpha + b\beta + c = 0 \\ a'\alpha + b'\beta + c' = 0 \end{array}\right\}$$ por ser $(\alpha,\beta)$ la solución del sistema (6).

Así pues ha quedado una ecuación homogénea que se resolverá como se vió en el número anterior mediante el cambio $\frac{Y}{X} = u$

Después de resolverla, se desharán todos los cambios efectuados, osea se pone:

$$u = \frac{Y}{X} = \frac{y-\beta}{x-\alpha}$$

b) El sistema es incompatible. Las rectas son paralelas. Se cumplirá la siguiente relación entre sus coeficientes



$$\frac{a'}{a} = \frac{b'}{b} \neq \frac{c'}{c}$$

Llamando

$$K = \frac{a'}{a} = \frac{b'}{b}, \quad \begin{cases} a' = Ka \\ b' = Kb \end{cases}$$

y la ecuación (5) queda

$$\frac{dy}{dx} = f\left(\frac{ax + by + c}{K(ax + by) + c'}\right) \tag{7}$$

Efectuamos el cambio

$$ax + by = u$$

$$a + b\frac{dy}{dx} = \frac{du}{dx}$$

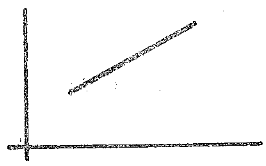
Sustituyendo en (7) queda

$$\frac{1}{b} \cdot \frac{du}{dx} - \frac{a}{b} = f\left(\frac{u+c}{Ku + c'}\right)$$

$$\frac{du}{dx} = b\left[\frac{a}{b} + f\left(\frac{u+c}{Ku + c'}\right)\right] = \varphi(u)$$

que es de variables separadas.

c) El sistema es compatible e indeterminado. Las rectas son coincidentes.



Se cumplirá:

$$\frac{a'}{a} = \frac{b'}{b} = \frac{c'}{c} = K$$

o sea

$$a' = Ka, \quad b' = Kb, \quad c' = Kc$$

Sustituyendo en (5) queda

$$\frac{dy}{dx} = f\left(\frac{ax + by + c}{Kax + Kby + Kc}\right) = f\left(\frac{1}{K}\right) = K_1$$

o sea

$$dy = K_1 \, . \, dx$$
$$y = K_1 \, . \, x + c$$

Ejemplos

1) Resolver la ecuación

$$(x-y-1)dx + (4y + x - 1)\,dy = 0$$

Se resuelve el sistema:

$$\left\{ \begin{array}{l} x-y-1 = 0 \\ 4y+x-1 = 0 \end{array} \right\} \quad \text{y se obtiene} \quad \left\{ \begin{array}{l} \alpha = 1 \\ \beta = 0 \end{array} \right.$$

Efectuamos el cambio

$$\left\{ \begin{array}{l} x = X + 1 \\ y = Y \end{array} \right\} \quad \left. \begin{array}{l} dx = dX \\ dy = dY \end{array} \right\} \quad \text{sustituyendo queda}$$

$(X-Y).dX + (4Y + X)dY = 0$ que es homogénea

$Y = uX;\ dY = udX + X.du$ y nos da

$$(1 - u).dX + (4Y + 1)(u\,dX + Xdu) = 0$$

$$\frac{dX}{X} + \frac{4u+1}{4u^2+1}\,du = 0$$

$$LX + \frac{1}{2}L(4u^2 + 1) + \frac{1}{2}\,\text{arctg}\,2u = \frac{c}{2}$$

$$L\,[X^2.(4u^2 + 1)] + \text{arctg}\,2u = c$$

y deshaciendo el cambio:

$$L\,[4y^2 + (x-1)^2] + \text{arc tg}\,\frac{2y}{x - 1} = c$$

2) Integrar:

$$(x+y)dx + (3x+3y - 4)dy = 0$$

Se hace el cambio

$$x + y = u$$
$$y = u - x$$

$dy = du - dx$, sustituyendo queda

$$(4-2u)dx + (3u - 4)du = 0, \text{ derivables separadas}$$

$$2dx + \frac{3u-4}{2-u}\, du = 0$$

Integrando y deshaciendo el cambio queda

$$2x - 3u - 2L(2 - u) = c$$
$$2x - 3(x+y) - 2L(2-x-y) = c$$
$$-x - 3y - 2L(2 - x - y) = c$$

6.- Diferenciales totales y factores integrantes.-

Aunque no existe ningún método general para resolver cualquier ecuación arbitraria de primer orden, en algunos casos especiales existen métodos aplicables sistemáticamente. Consideremos la ecuación diferencial

$$P(x.y)dx + Q(x,y)dy = 0 \qquad (8)$$

decimos que es diferencial exacta cuando existe una función $u(x,y)$ tal que $du(x,y)=$ $= 0$ y se cumple

$$du(x,y) \equiv P(x,y)dx+Q(x,y).dy$$

Pero como

$$du = \frac{\partial u}{\partial x}dx + \frac{\partial u}{\partial y}.dy \qquad \text{se debe cumplir}$$

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial x} &= P \\ \frac{\partial u}{\partial y} &= Q \end{aligned}\right\}$$

Si las funciones $P(x,y)$ y $Q(x,y)$ son tales que cumplen el teorema de Schwarz,

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 u}{\partial y \partial x}, \text{ se tendrá}$$

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}$$

Del mismo modo que se obtuvo la función potencial en las integrales curvilíneas, calcularemos $u(x,y)$,

$\frac{\partial u}{\partial x} = P$; $u = \int P dx + \varphi(y)$ donde $\varphi(y)$ es una función indeterminada que depende sólo de y que se calcula así:

$$\frac{\partial u}{\partial y} = Q = \int \frac{\partial P}{\partial y}\, dx + \varphi'(y)$$

$$\varphi'(y) = Q - \int \frac{\partial P}{\partial y}\, . dx$$

$$\varphi(y) = \int [Q - \int \frac{\partial P}{\partial y}\, dx ]\, dy \quad \text{y por tanto}$$

$$u(x, y) = \int P dx + \int [Q - \int \frac{\partial P}{\partial y}\, dx ]\, dy, \quad \text{y la integral general}$$

será $u(x, y) = c$, o sea

$$\int P . dx + \int [Q - \int \frac{\partial P}{\partial y}\, dx ]\, dy = c$$

6.1.- Factor integrante.-

Si la ecuación (8) no es diferencial exacta, pero existe una función $\mu(x, y)$, tal que multiplicando por ella la ecuación (8), la expresión que se obtiene

$$P(x, y) . \mu(x, y) dx + Q(x, y) . \mu(x, y) dy = 0 \qquad (9)$$

es diferencial exacta, podremos aplicar a (9) lo anteriormente expuesto.

Se llama "factor integrante" de la ecuación (8) a todas las funciones $\mu(x,y)$, que cumplan dicha condición.

La existencia de $\mu$ es una consecuencia del teorema de existencia de la integral. Por cada punto del plano y dentro del dominio de existencia de soluciones, debe pasar una sóla curva del haz integral, lo que equivale a decir que la constante c es una función del punto (x, y), o sea.

$$c = \varphi(x, y), \quad \text{luego}$$

$\dfrac{\partial \varphi}{\partial x} dx + \dfrac{\partial \varphi}{\partial y} dy = 0$ ecuación que por la unicidad de la solución debe ser equivalente a

$$P dx + Q dy = 0, \quad \text{lo que implica}$$

$$\frac{\partial \varphi / \partial x}{P} = \frac{\partial \varphi / \partial y}{Q} = \mu(x, y) \quad \text{ó sea}$$

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x} = P . \mu$$

$$\frac{\partial \varphi}{\partial y} = Q . \mu$$

Probada la existencia del factor integrante $\mu$, veamos cómo se calcula.

Se debe cumplir la condición de ser iguales las derivadas cruzadas en la ecuación (9), y por lo tanto

$$\frac{\partial(\mu . P)}{\partial y} = \frac{\partial(\mu . Q)}{\partial x}$$

que desarrollando nos da la siguiente ecuación

$$\mu . \frac{\partial P}{\partial y} + P . \frac{\partial \mu}{\partial y} = \mu . \frac{\partial Q}{\partial x} + Q . \frac{\partial \mu}{\partial x} \qquad (10)$$

La expresión (10) es una ecuación en derivadas parciales, cuyas soluciones nos darán los posibles factores integrantes $\mu(x, y)$. Sin embargo, su integración resulta ser en general más complicada que la de la propia ecuación diferencial ordinaria propuesta (8), pero nuestro objetivo no es hallar las infinitas soluciones que luego veremos tiene la ecuación (10), ya que con un sólo factor integrante nos basta para resolver nuestro problema, por lo que podremos introducir condiciones particulares que simplifiquen la ecuación (10) y nos permitan hallar soluciones particulares de la misma.

Veremos a continuación los tipos más frecuentes de factor integrante:

a) Factor integrante dependiente sólo de x

Supongamos que existe un factor integrante, solución de (10) de la forma $\mu = \mu(x)$; se tendrá:

$$\left.\begin{array}{l} \dfrac{\partial \mu}{\partial y} = 0 \\ \\ \dfrac{\partial \mu}{\partial x} = \dfrac{d\mu}{dx} \end{array}\right\} \text{ sustituyendo en (10) queda}$$

$$\mu . \frac{\partial P}{\partial y} = \mu . \frac{\partial Q}{\partial x} + Q . \frac{d\mu}{dx} \quad \text{ó sea}$$

$$\frac{d\mu}{\mu} = \frac{\dfrac{\partial P}{\partial y} - \dfrac{\partial Q}{\partial x}}{Q} \, dx$$

Para que exista este factor integrante, la función $\left( \frac{\partial P}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial x} \right)/Q$ debe ser función sólo de x, integrando se obtiene

$$\mu = e^{\int \frac{1}{Q}\left(\frac{\partial P}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial x}\right) . dx}$$

La ecuación $P.\mu + Q.\mu = 0$, para el valor de $\mu$ anterior, será diferencial exacta y se integrará tal como se indicó anteriormente.

b) Factor integrante dependiente sólo de y.

Sea $\mu = \mu(y)$; se tendrá:

$$\left.\begin{array}{l} \dfrac{\partial \mu}{\partial x} = 0 \\[2ex] \dfrac{\partial \mu}{\partial y} = \dfrac{d\mu}{dy} \end{array}\right\} \text{ sustituyendo en (10) quedará:}$$

$$\mu . \frac{\partial P}{\partial y} + P . \frac{d\mu}{dy} = \mu . \frac{\partial Q}{\partial x}, \text{ ó sea}$$

$$\frac{d\mu}{\mu} = \frac{\dfrac{\partial Q}{\partial x} - \dfrac{\partial P}{\partial y}}{P} dy$$

Para que exista este factor integrante, la función $\left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right)/P$ debe ser función sólo de y. Integrando se obtendrá:

$$\mu = e^{\int \frac{1}{P}\left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) dy}$$

c) Factor integrante función sólo del producto x, y

Sea $\mu = \mu(x.y)$, hagamos $u = x.y$, y se tendrá

$$\mu = \mu(u) \left\{\begin{array}{l} \dfrac{\partial \mu}{\partial x} = \dfrac{d\mu}{du} . \dfrac{\partial u}{\partial x} = \dfrac{d\mu}{du} . y \\[2ex] \dfrac{\partial \mu}{\partial y} = \dfrac{d\mu}{du} . \dfrac{\partial u}{\partial y} = \dfrac{d\mu}{du} . x \end{array}\right.$$

sustituyendo en (10) quedará:

$$\mu . \frac{\partial P}{\partial y} + P . \frac{d\mu}{du} . x = \mu . \frac{\partial Q}{\partial x} + Q . \frac{d\mu}{du} . y, \text{ ó sea}$$

$$\frac{d\mu}{\mu} = \frac{\dfrac{\partial Q}{\partial x} - \dfrac{\partial P}{\partial y}}{P.x - Q.y} du$$

Para que exista dicho factor integrante, la función $\left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right)/(P.x - Q.y)$ debe ser función sólo $u = x.y$; integrando se obtendrá:

$$\mu = e^{\int \frac{\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}}{P.x - Q.y}}$$

d) Factor integrante función sólo de x + y.

Sea $\mu = \mu(x + y)$; hagamos $u = x + y$, y se tendrá:

$$\mu = \mu(u) \quad \left\{ \begin{array}{l} \dfrac{\partial \mu}{\partial x} = \dfrac{d\mu}{du} \cdot \dfrac{\partial u}{\partial x} = \dfrac{d\mu}{du} \cdot 1 = \dfrac{d\mu}{du} \\[2ex] \dfrac{\partial \mu}{\partial y} = \dfrac{d\mu}{du} \cdot \dfrac{\partial u}{\partial y} = \dfrac{d\mu}{du} \cdot 1 = \dfrac{d\mu}{du} \end{array} \right\}$$

sustituyendo en (10) quedará:

$$\mu . \frac{\partial P}{\partial y} + P . \frac{d\mu}{du} = \mu . \frac{\partial Q}{\partial x} + Q . \frac{d\mu}{du}$$

$$\frac{d\mu}{\mu} = \frac{\dfrac{\partial Q}{\partial x} - \dfrac{\partial P}{\partial y}}{P - Q} du$$

Deben ser $\left(\dfrac{\partial Q}{\partial x} - \dfrac{\partial P}{\partial y}\right)/(P-Q)$ función sólo de $u = x + y$

Integrando, obtendremos $\mu$

$$\mu = e^{\int \frac{\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}}{P - Q} du}$$

Si el factor integrante fuera sólo función de x-y, se habría obtenido como condición que $\left(\dfrac{\partial P}{\partial y} - \dfrac{\partial Q}{\partial x}\right)/(P+Q)$ fuese función sólo de $u = x-y$, y el factor integrante sería:

$$\mu = e^{\int \frac{\frac{\partial P}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial x}}{P + Q} du}$$

e) Factor integrante función sólo de $y/x$.

Sea $\mu = \mu\left(\dfrac{y}{x}\right)$, hacemos $u = \dfrac{y}{x}$ y se tendrá

$$\left. \begin{array}{l} \dfrac{\partial \mu}{\partial x} = \dfrac{d\mu}{du} \cdot \dfrac{\partial u}{\partial x} = - \dfrac{d\mu}{du} \cdot \dfrac{y}{x^2} \\[2ex] \dfrac{\partial \mu}{\partial y} = \dfrac{d\mu}{du} \cdot \dfrac{\partial u}{\partial y} = \dfrac{d\mu}{du} \cdot \dfrac{1}{x} \end{array} \right\} \text{Sustituyendo en (10) queda}$$

$$\mu . \frac{\partial P}{\partial y} + P . \frac{d\mu}{du} . \frac{1}{x} = \mu . \frac{\partial Q}{\partial x} - Q . \frac{d\mu}{du} . \frac{y}{x^2}$$

ó sea

$$\frac{d\mu}{\mu} = \frac{\dfrac{\partial Q}{\partial x} - \dfrac{\partial P}{\partial y}}{\dfrac{P}{x} + \dfrac{Q . y}{x^2}} du$$

La función $\left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right)/\left(\frac{P}{x} - \frac{Q \cdot y}{x^2}\right)$ deberá depender sólo de $u =$
$= y/x$, y el factor integrante será:

$$\mu = e^{\int \frac{\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}}{\frac{P}{x} + \frac{Q \cdot y}{x^2}} du}$$

f) <u>Factor integrante de las ecuaciones homogéneas.</u> -

Aunque las ecuaciones homogéneas ya se han estudiado probemos que si $P\,dx + Q\,dy = 0$ es una ecuación homogénea,

$\mu = \frac{1}{x\,P + y\,Q}$ es un factor integrante de las mismas:

Queda reducido a probar que

$$\frac{P}{x\,P + y\,Q}\,dx + \frac{Q}{x\,P + y\,Q}\,dy = 0$$

es diferencial exacta. O sea

$$\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{P}{xP + yQ}\right) = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{Q}{xP + yQ}\right)$$

desarrollando:

$$\frac{(xP + yQ)\frac{\partial P}{\partial y} - P\left(x\frac{\partial P}{\partial y} + Q + y\frac{\partial Q}{\partial y}\right)}{(xP + yQ)^2} = \frac{(xP + yQ)\frac{\partial Q}{\partial x} - Q\left(P + x\frac{\partial P}{\partial x} + y\frac{\partial Q}{\partial x}\right)}{(xP + yQ)^2}$$

$$xP\frac{\partial P}{\partial y} + yQ\frac{\partial P}{\partial y} - xP\frac{\partial P}{\partial y} - PQ - yP\frac{\partial Q}{\partial y} = xP\frac{\partial Q}{\partial x} + yQ\frac{\partial Q}{\partial x} - PQ - xQ\frac{\partial P}{\partial x} - yQ\frac{\partial Q}{\partial x}$$

simplificando

$$yQ\frac{\partial P}{\partial y} - yP\frac{\partial Q}{\partial y} = xP\frac{\partial Q}{\partial x} - xQ\frac{\partial P}{\partial x}$$

o sea:

$$Q\left[x\frac{\partial P}{\partial x} + y\frac{\partial P}{\partial y}\right] = P\left[x\frac{\partial Q}{\partial x} + y\frac{\partial Q}{\partial y}\right]$$

que se verifica idénticamente, toda vez que el teorema de Euler para las funciones homogéneas establece que:

$$\left.\begin{aligned} x\frac{\partial P}{\partial x} + y\frac{\partial P}{\partial y} &= n \cdot P \\ x\frac{\partial Q}{\partial x} + y\frac{\partial Q}{\partial y} &= n \cdot Q \end{aligned}\right\}$$

Por lo que la igualdad anterior se convierte en una identidad:

$$Q(n.p) = P.(n\,Q)$$

6.2.- Teorema relativo a los factores integrantes.-

Vamos a probar el siguiente teorema:

Si $\mu_1$, $\mu_2$, son dos factores integrantes de la ecuación: $Pdx + Qdy = 0$ cuyo cociente no se reduce a una constante, $\mu_1/\mu_2 = C$ es la integral de la ecuación propuesta.

Probemos que $\mu_1/\mu_2 = C$ verifica la ecuación con lo que quedará probado el teorema:

Diferenciando $\mu_1/\mu_2 = C$ obtenemos:

$$\mu_2\left(\frac{\partial\mu_1}{\partial x}dx + \frac{\partial\mu_1}{\partial y}dy\right) - \mu_1\left(\frac{\partial\mu_2}{\partial x}dx + \frac{\partial\mu_2}{\partial y}dy\right) = 0$$

$$\left(\mu_2\frac{\partial\mu_1}{\partial x} - \mu_1\frac{\partial\mu_2}{\partial x}\right)dx + \left(\mu_2\frac{\partial\mu_1}{\partial y} - \mu_1\frac{\partial\mu_2}{\partial y}\right)dy = 0 \qquad (A)$$

Probemos que esta ecuación es equivalente a $P\,dx + Q\,dy = 0$ (B).

En efecto, por ser $\mu_1$, $\mu_2$ factores integrantes verifican:

$$\left.\begin{aligned}\mu_1\frac{\partial P}{\partial y} + P\frac{\partial\mu_1}{\partial y} &= \mu_1\frac{\partial Q}{\partial x} + Q\frac{\partial\mu_1}{\partial x}\\ \mu_2\frac{\partial P}{\partial y} + P\frac{\partial\mu_2}{\partial y} &= \mu_2\frac{\partial Q}{\partial x} + Q\frac{\partial\mu_2}{\partial x}\end{aligned}\right\}$$

Multiplicando la primera por $\mu_2$ y la segunda por $\mu_1$ se obtiene:

$$P\left[\mu_2\frac{\partial\mu_1}{\partial y} - \mu_1\frac{\partial\mu_2}{\partial y}\right] = Q\left[\mu_2\frac{\partial\mu_1}{\partial x} - \mu_1\frac{\partial\mu_2}{\partial x}\right]$$

esto equivale a:

$$\frac{\mu_2\frac{\partial\mu_1}{\partial y} - \mu_1\frac{\partial\mu_2}{\partial y}}{Q} = \frac{\mu_2\frac{\partial\mu_1}{\partial x} - \mu_1\frac{\partial\mu_2}{\partial x}}{P}$$

lo cual demuestra que las ecuaciones (A) y (B) son equivalentes.

Este teorema prueba que conocido un factor integrante quedan determinados infinitos de ellos, pues si conocido $\mu_1$ ponemos, $\mu_2 = v.\mu_1$ tenemos que se verificará:

$$P\frac{\partial(v\,\mu_1)}{\partial y} - Q\frac{\partial(v\,\mu_1)}{\partial x} + v\,\mu_1\left(\frac{\partial P}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial x}\right) = 0$$

que se reduce a:

$$\mu_1 \left[P \frac{\partial v}{\partial y} - Q \frac{\partial v}{\partial x}\right] = 0$$

Si v es constante ya hemos visto que $\mu_2 = C\mu_1$ es la integral general de la ecuación, pero si $u = C$ es una forma de esa integral tenemos que $v = F(u)$ y por tanto que:

$$\mu_2 = \mu_1 F(u)$$

siendo $F(u)$ una función cualquiera de $u = u(xy)$.

Ejemplos

1.- Integrar $(x^2 + y^2 + x)dx + xy\,dy = 0$

Se tiene $\frac{\partial P}{\partial y} = 2y$, $\frac{\partial Q}{\partial x} = y$, luego no es diferencial exacta. Sin embargo admite un factor integrante función sólo de x, ya que

$$\frac{\frac{\partial P}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial x}}{Q} = \frac{2y-y}{xy} = \frac{1}{x}, \text{ y por lo tanto}$$

$$\mu(x) = e^{\int \frac{1}{x} dx} = e^{Lx} = x$$

Multiplicando la ecuación por él queda la diferencial exacta

$$(x^3 + xy^2 + x^2)dx + x^2 y\,dy = 0$$

que integrada nos conduce a la siguiente solución

$$3x^4 + 4x^3 + 6x^2 y^2 = c$$

2.- Integrar $(2xy^4 e^y + 2xy^3 + y)\,dx + (x^2 y^4 e^y - x^2 y^2 - 3x)dy = 0$. Se tiene:

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial P}{\partial y} &= 8xy^3 e^y + 2xy^4 e^y + 6xy^2 + 1 \\ \frac{\partial Q}{\partial x} &= 2xy^4 e^y - 2xy^2 - 3 \end{aligned}\right\} \text{luego no es diferencial}$$

exacta.

Pero admite un factor integrante función de y, ya que

$$\frac{\frac{\partial P}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial x}}{P} = \frac{4}{y} \; ; \; \mu = e^{-\int \frac{4}{y} dy} = e^{-4Ly} = \frac{1}{y^4}$$

Multiplicando la ecuación por él queda:

$$(2xe^y + \frac{2x}{y} + \frac{4}{y^3})dx + (x^2e^y - \frac{x^2}{y^2} - \frac{3x}{y^4})dy = 0$$

que es diferencial exacta. Integrándola se obtiene

$$x^2 e^y + \frac{x^2}{y} + \frac{x}{y^3} = C$$

7.- Ecuación lineal.-

Se llaman así a las ecuaciones diferenciales en las que $y$ e $y'$ son de primer grado. Pueden expresarse en la forma

$$\frac{dy}{dx} + X(x).\ y = F(x) \qquad (11)$$

Estas ecuaciones se encuentran constantemente en gran número de aplicaciones y tienen la particularidad de que es posible dar una solución completa de ellas explícitamente.

Veamos diversos modos para integrarla:

a) Primer método.

Hagamos el cambio $y = u.v$, siendo $u$ y $v$ funciones de $x$.

$$\frac{dy}{dx} = u\frac{dv}{dx} + v\frac{du}{dx}$$

Sustituyendo en (11) obtenemos

$$u\frac{dv}{dx} + v\frac{du}{dx} + X.u.v = F(x)$$

$$v(\frac{du}{dx} + X.u) + u\ .\ \frac{dv}{dx} = F(x) \qquad (12)$$

Como $\underline{u}$ y $\underline{v}$ están relacionadas exclusivamente por la condición $y = u.v$, tenemos un grado de libertad para su determinación, por lo que podemos agregar una condición arbitraria; expresemos, por ejemplo, que el coeficiente de $v$ en (12) se anula, con lo que (12) se descompone en las siguientes ecuaciones

$$\left.\begin{array}{l} \dfrac{du}{dx} + X.u = 0 \\ u.\dfrac{dv}{dx} = F(x) \end{array}\right\}$$

De la primera sale $du/u = -X.dx$; $u = e^{-\int Xdx}$, sustituyendo este valor de u en la segunda se obtiene

$$e^{-\int Xdx}\,\frac{dv}{dx} = F(x), \text{ luego}$$

$$dv = F(x).e^{\int X.dx}.\,dx$$

$$v = c + \int F(x)\,.\,e^{\int X.dx}.\,dx$$

y la solución general de la ecuación lineal (11) será:

$$y = e^{-\int Xdx}\left[c + \int F(x)\,.\,e^{\int X.dx}.\,dx\right]$$

b) Segundo método.

Llamemos ecuación incompleta a la que resulta de igualar a cero el primer miembro de (11), o sea

$$\frac{dy}{dx} + X(x)\,.\,y = 0 \qquad (13)$$

resolviendola se obtiene

$$\frac{dy}{y} = -\,X.dx\ ;\ y = c.e^{-\int X.dx} \qquad (14)$$

Para ningún valor constante de c, será (14) la solución general de (11), pero vamos a suponer que c es una función de x, c = c(x), que determinaremos con la condición de ser (14) la solución general de (11). Derivando (14) se obtendrá:

$$y' = c'.e^{-\int X.dx} - c.X.e^{-\int X.dx}$$

sustituyendo y' e y en (11) queda

$$c'.e^{-\int X.dx} - c.x.e^{-\int X.dx} + c.e^{-\int X.dx}.x = F(x)$$

$$c'.e^{-\int X.dx} = F(x)$$

$$c' = F(x) \cdot e^{\int X \cdot dx} \quad \text{e integrando}$$

$$c = K + \int F(x) \cdot e^{\int X \cdot dx} \cdot dx,$$

sustituyendo en (14) sale la solución general de (11).

$$y = e^{-\int X \cdot dx} \left[K + \int F(x) \cdot e^{\int X \cdot dx} dx\right] \tag{15}$$

A este método se le llama de variación de constantes.

c) Tercer método.

Si se observa la solución general obtenida (15), para cada valor de la constante K se tendrá una solución particular de la ecuación (11), así para K = 0 quedará:

$$y_1 = e^{-\int X \cdot dx} \cdot \int F(x) \cdot e^{\int X \cdot dx} \cdot dx$$

y la ecuación (15) se podrá escribir así

$$y = K \cdot e^{-\int X \cdot dx} + y_1$$

Obsérvese que el primer sumando es la solución general de la ecuación incompleta (13), por lo que se podrá decir:

"Para obtener la solución general de la ecuación completa (11), bastará sumar a la solución general de la ecuación incompleta (13), una solución particular de la ecuación completa (11)".

d) Cuarto método.

Escribamos la ecuación lineal de la siguiente forma

$$dy + [X \cdot y - F(x)]\, dx = 0$$

Se puede ver que admite un factor integrante dependiente sólo de x, $\mu = e^{\int X \cdot dx}$, que la convierte en diferencial exacta.

7.1.- Propiedades de la ecuación lineal.-

Viendo la forma de la solución general de la ecuación lineal (15), se observa que ésta es lineal en la constante, pudiéndose escribir así

$$y = K.f(x) + \varphi(x) \qquad (16)$$

Para cada valor de K. se tendrá una solución particular, por lo que se tendrá

$$\left.\begin{array}{ll} \text{para } K = K_1, & y_1 = K_1.\ f(x) + \varphi(x) \\ \text{para } K = K_2, & y_2 = K_2.f(x) + \varphi(x) \end{array}\right\} \qquad \begin{array}{l}(17)\\(18)\end{array}$$

Restando (16) y (17) y luego (18) y (17) escribiremos

$$\left.\begin{array}{l} y - y_1 = (K - K_1).\ f(x) \\ y_2 - y_1 = (K_2 - K_1).f(x) \end{array}\right\} \text{ Dividiéndolas queda}$$

$$\frac{y-y_1}{y_2-y_1} = \frac{K-K_1}{K_2-K_1} = c$$

El conocimiento de dos integrales particulares $y_1$ e $y_2$ da pues la integral general de la ecuación lineal, sin necesidad de ninguna cuadratura.

Por otro lado, el cociente anterior expresa que la razón simple de las - ordenadas de tres curvas integrales (correspondientes las tres a una misma abs- cisa) es constante

$$(y,\ y_1,\ y_2) = c$$

<u>Ejemplos.</u>

Integrar

$$\frac{dy}{dx} - \frac{y}{x} = x^2$$

La ecuación incompleta es

$$\frac{dy}{dx} - \frac{y}{x} = 0$$

resolviéndola se obtiene

$$\frac{dy}{y} = \frac{dx}{x}\ ;\ Ly = Lx + Lc;\ y = cx$$

Aplicando variación de constantes

$$y' = c'x + c$$

sustituyendo en la ecuación queda

$$c'x + c - \frac{cx}{x} = x^2$$

$$c'x = x^2; \; c' = x; \; c = \frac{x^2}{2} + K$$

y la solución general será

$$y = \frac{x^3}{2} + K.x$$

8.- Ecuación de Bernouilli.-

Es de la forma:

$$y' + X(x).y = F(x).y^n$$

dividiendo por $y^n$

$$\frac{y'}{y^n} + X(x).\frac{1}{y^{n-1}} = F(x)$$

haciendo el cambio

$$\frac{1}{y^{n-1}} = u; \; -(n-1).\frac{y'}{y^n} = u' \qquad \text{queda:}$$

$$-\frac{u'}{n-1} + X(x).u = F(x) \qquad \text{que es lineal}$$

Ejemplo.

Integrar:

$$xy' + y = y^2.Lx$$

dividiendo por $y^2$

$$\frac{xy'}{y^2} + \frac{1}{y} = Lx$$

se hace el cambio

$$\frac{1}{y} = u, \qquad \frac{-y'}{y^2} = u', \text{ con lo que queda}$$

$$-x.u' + u = Lx \qquad \text{lineal}$$

la incompleta

$$-xu' + u = 0, \text{ se resuelve y da}$$

$$\frac{du}{u} = \frac{dx}{x}, \; Lu = Lx + Lc, \; u = cx,$$

aplicando variación de constantes

$$u' = c'x + c, \text{ y sustituyendo}$$

$$-x(c'x + c) + cx = Lx; \quad c' = -\frac{Lx}{x^2}$$

$$c = -\int Lx \cdot \frac{dx}{x^2} + K = \frac{1}{x} \cdot Lx + \frac{1}{x} + K$$

y la solución será

$$u = Lx + 1 + Kx$$

deshaciendo el cambio se obtiene

$$\frac{1}{y} = Lx + 1 + Kx$$

9.- <u>Ecuación de Riccati</u>.-

Es la ecuación

$$y' = X(x) + X_1(x) \cdot y + X_2(x) \cdot y^2 \tag{19}$$

Liouville demostró la imposibilidad general de reducirla a cuadraturas. Vamos a demostrar que esta reducción es posible si conocemos una solución particular $y_1 = y_1(x)$ de (19). Se hace el cambio

$$\left.\begin{aligned} y &= y_1 + \frac{1}{u} \\ y' &= y'_1 - \frac{u'}{u^2} \end{aligned}\right\} \text{ sustituyendo en (19)}$$

$$y'_1 - \frac{u'}{u^2} = X + X_1 \cdot \left(y_1 + \frac{1}{u}\right) + X_2\left(y_1 + \frac{1}{u^2}\right) \tag{20}$$

como $y_1$ es solución particular de (19) se tendrá:

$$y'_1 = X + X_1 \cdot y_1 + X_2 \cdot y^2_1$$

Desarrollando (20), teniendo en cuenta la relación anterior, se obtiene

$$u' + (X_1 + 2X_2 \cdot y_1)u + X_2 = 0$$

ecuación lineal en u, que integrada nos da la solución.

Así pues el conocimiento de una solución particular $y_1$, reduce la integración a dos cuadraturas.

Si se conocen dos soluciones particulares de (19) $y_1$, e $y_2$, mediante la primera se reduce a una lineal que a su vez admitirá la solución particular $u_1 = 1/(y_2-y_1)$, con lo que su integración se reducirá pues a una cuadratura. En este caso el cambio $u = (y-y_1)/(y-y_2)$, la transforma en homogénea y queda $du/u = X_2 . (y_1-y_2) . dx$.

Del mismo modo, si se conocen tres soluciones particulares $y_1, y_2, y_3$ de (19), mediante $y_1$ y el cambio $y = y_1 + \frac{1}{u}$ se reducirá a la lineal, de la que ahora se conocen dos soluciones particulares

$$\begin{cases} u_1 = \dfrac{1}{y_2 - y_1} \\[2ex] u_2 = \dfrac{1}{y_3 - y_1} \end{cases}$$

por lo que, como se vió en la lineal, no es necesaria entonces ninguna cuadratura, siendo su solución

$$(u\ u_1\ u_2) = c, \quad \text{o sea}$$

$$\frac{u - u_1}{u_2 - u_1} = c$$

sustituyendo $u_1$ y $u_2$ se obtiene

$$\frac{\dfrac{1}{y-y_1} - \dfrac{1}{y_2-y_1}}{\dfrac{1}{y_3-y_1} - \dfrac{1}{y_2-y_1}} = \frac{\dfrac{y_2 - y}{y - y_1}}{\dfrac{y_2 - y_3}{y_3 - y_1}} = c$$

y se puede decir por lo tanto que la razón doble de cuatro integrales particulares de Riccati es constante

$$(y, y_1, y_2, y_3) = c$$

Ejemplo.

Integrar:

$$y'(1 - x^3) + 2x + x^2 y - y^2 = 0$$

---

Por ser los coeficientes polinomios, vamos a probar soluciones particulares del mismo tipo; ensayemos la siguiente

$$\left.\begin{aligned} y_1 &= ax^2 + bx + c \\ y'_1 &= 2ax + b \end{aligned}\right\} \text{ sustituyendo en la ecuación queda}$$

$$(2ax+b)(1-x^3)+2x + x^2(ax^2 + bx + c) - (ax^2 + bx + c)^2 = 0$$

Identificando los coeficientes

$$\left.\begin{aligned} a + a^2 &= 0 \\ ab &= 0 \\ c-b^2-2ac &= 0 \\ a+1-bc &= 0 \\ b-c^2 &= 0 \end{aligned}\right\} \begin{array}{l} \text{Se obtienen las siguientes soluciones} \\ a_1 = 0,\ b_1 = 1,\ c_1 = 1 \\ a_2 = -1, b_2 = 0,\ c_2 = 0 \end{array}$$

a las que corresponden las siguientes soluciones particulares

$$\left\{\begin{aligned} y_1 &= x + 1 \\ y_2 &= -x^2 \end{aligned}\right.$$

Con la primera de ellas hacemos el cambio

$$\left.\begin{aligned} y &= x + 1 + \frac{1}{u} \\ y' &= 1 - \frac{u'}{u^2} \end{aligned}\right\} \text{ sustituyendo en la ecuación dada}$$

$$\left(1 - \frac{u'}{u^2}\right)(1-x^3)+2x+x^2\left(x + 1 + \frac{1}{u}\right)-\left(x+1+ \frac{1}{u}\right)^2=0$$

$$-\frac{u'}{u^2}(1-x^3) + \frac{x^2}{u} - \frac{1}{u^2} - \frac{2(x+1)}{u} = 0$$

$$-u'(1-x^3)+ux^2 - 1 - 2\,u(x + 1) = 0$$

$$-u'(1-x^3)-u\,[2x + 2 - x^2] = 1$$

Esta ecuación lineal tiene la solución particular

$$u_1 = \frac{1}{y_2 - x - 1} = \frac{1}{-x^2 - x - 1}$$

por lo que se podrá calcular con una sola cuadratura. Operando se obtiene como solución general

$$x^2 + y^2 = c(xy + 1)$$

## 10.- Ecuaciones de primer orden no lineales en y'.-

Vamos a estudiar ahora los casos más frecuentes de integrabilidad de ecuaciones de primer orden $F(x, y, y') = 0$, en las que y' no aparece en forma lineal, sino en forma polinómica de grado mayor que la unidad, irracional e incluso transcendente.

### 10.1.- Ecuaciones resolubles en y'.-

Si la ecuación $F(x, y, y') = 0$ es un polinomio de grado m en y', ordenando respecto de las potencias de y' se podrá escribir así

$$y'^{m} + P_1(x, y).y'^{m-1} + \ldots + P_{m-1}(x, y).y' + P_m(x, y) = 0$$

en donde los coeficientes $P_1, \ldots, P_{m-1}, P_m$ son funciones de x e y. Resolviendo esta ecuación como si fuera algebráica, tomando y' como incógnita, se obtendrán m ecuaciones lineales

$$y' = \varphi_1(x, y),\ y' = \varphi_2(x, y), \ldots, y' = \varphi_m(x, y)$$

que integradas darán

$$y = F_1(x, y, c),\ \ y = F_2(x, y, c), \ldots, y = F_m(x, y, c)$$

La integral general buscada será:

$$[y-F_1(x, y, c)][y-F_2(x, y, c)] \ldots [y-F_m(x, y, c)] = 0$$

Ejemplo.

Resolver

$$y'^4-(x+2y+1)y'^3 + (x+2y+2xy)y'^2 -2xyy' = 0$$

---

Resulta en y' salen las siguientes raices

$$y' = 0,\ \ y' = 1,\ \ y' = x,\ \ y' = 2y$$

que integradas da

$$y-c = 0,\ \ y-x-c = 0,\ \ 2y-x^2-c = 0,\ \ y-c.e^{2x} = 0$$

luego la integral general será:

$$(y-c)(y-x-c).(2y-x^2-c).(y-c.e^{2x}) = 0$$

10.2.- Ecuaciones resolubles en y.-

Supongamos que la ecuación no sea resoluble en y' pero sí en y

$$y = f(x,\ y') \tag{21}$$

Llamando $y' = p$, la ecuación queda así:

$$y = f(x,\ p) \tag{22}$$

Derivando (22), suponiendo que f es derivable

$$y' = p = \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial p} \cdot \frac{dp}{dx} \tag{23}$$

La ecuación (23) es otra ecuación de 1^er^ orden que suponemos poder resolverla. Integrada nos dará:

$$\varphi(x, p, c) = 0 \tag{24}$$

La ecuación (24) junto con la (22) nos da las ecuaciones paramétricas de la integral general de (21). Para obtener las ecuaciones cartesianas de dicha integral, se eliminaría p entre ambas ecuaciones.

10.3.- Ecuaciones resolubles en x.-

Si en vez de despejar y, despejamos x, quedaría

$$x = f(y,\ y') \tag{25}$$

Haciendo análogamente $y' = p$, queda

$$x = f(y,\ p) \tag{26}$$

Derivando (26) respecto de x, poniendo

$$\frac{dp}{dx} = \frac{dp}{dy} \cdot \frac{dy}{dx} = \frac{dp}{dy} \cdot p, \qquad \text{se obtiene}$$

$$1 = \frac{\partial f}{\partial y} \cdot p + \frac{\partial f}{\partial p} \cdot \frac{dp}{dy} \cdot p \tag{27}$$

Esta última ecuación (27) es otra ecuación de 1^er^ orden que suponemos poder resolverla; integrada nos dará

$$\varphi\,(y,\ p,\ c) = 0 \tag{28}$$

La ecuación (28) junto con la (26) nos define la integral general en paramétricas (p parámetro). Para obtener las ecuaciones cartesianas se eliminaría p entre ambas ecuaciones.

Debe notarse que estos tipos se integran mediante el recurso previo de una derivación y de hecho estamos manejando implícitamente ecuaciones de orden superior al primero, ya que por ejemplo $\frac{dp}{dx} = \frac{d}{dx}(y') = y''$. La elección adecuada de la variable y la función en cada caso, es la que nos conduce a la solución.

Ejemplos.

1.- Integrar:

$$y = 2xy' + x^2 \cdot y'^4$$

---

Hacemos $y' = p$

$$y = 2x\,p + x^2\,p^4$$

derivando respecto de x se obtiene

$$p = 2x\frac{dp}{dx} + 2p + 2xp^4 + 4x^2p^3 \cdot \frac{dp}{dx}$$

$$\left(p+2x\frac{dp}{dx}\right) \cdot (1 + 2p^3x) = 0$$

descartando $1 + 2p^3x = 0$ por no contener $dp/dx$, queda

$$p + 2x\frac{dp}{dx} = 0 \qquad \text{e integrando sale}$$

$$p^2x = c$$

la solución es en paramétricas $\begin{cases} x = \dfrac{c}{p^2} \\ y = \dfrac{2c}{p} + c^2 \end{cases}$

eliminando p se obtendría la solución en cartesianas

$$p^2 = \frac{c}{x},\quad y - p^4x^2 = 2px$$

$(y-p^4x^2)^2 = 4p^2x^2$, sustituyendo $p^2$ se obtiene

$$(y - c^2)^2 = 4cx$$

2.- Resolver

$$4x = y\, y'(y'^2 - 3)$$

---

Llamando $y' = p$

$$4x = y.p(p^2-3), \text{ derivando respecto de } y$$

$$\frac{4}{p} = p(p^2-3) + 3\, y(p^2-1)\,\frac{dp}{dy}$$

$$\frac{dy}{y} + \frac{3p(p^2-1)\,dp}{(p^2-4)(p^2+1)} = 0$$

que es de variables separadas, integrando

$$Ly + \frac{9}{10}.L(p+2) + \frac{9}{10}L(p-2) + \frac{3}{5}.L(p^2+1) = LK$$

$$\left\{\begin{aligned} y &= \frac{K}{(p^2-4)^{9/10}.(p^2+1)^{3/5}} \\ x &= \frac{Kp\,(p^2-3)}{4(p^2-4)^{9/10}.(p^2+1)^{3/5}} \end{aligned}\right.$$

10.4.- Ecuación de Lagrange.-

Se llama así a la ecuación resoluble en y que tiene la siguiente forma

$$y = x.f(y') + \varphi(y'), \qquad \text{(siendo } f(y') \neq y') \tag{29}$$

Haciendo $y' = p$ queda

$$y = x.f(p) + \varphi(p) \tag{30}$$

Derivando respecto de x

$$p = f(p) + x.f'(p).\frac{dp}{dx} + \varphi'(p).\frac{dp}{dx}$$

$$p - f(p) = \frac{dp}{dx}\,[x.f'(p) + \varphi'(p)]$$

Multiplicando por dx/dp los dos miembros

$$[p - f(p)].\frac{dx}{dp} - x.f'(p) = \varphi'(p) \tag{31}$$

La ecuación (31) es lineal, tomando x como función y p como variable. Integrada dará

$$x = F(p, c) \tag{32}$$

La ecuación (32) junto con la (30) nos define la integral general en paramétricas. Si se elimina p entre ambas se obtendrían las ecuaciones cartesianas de dicha solución.

El método supone $f(p) \neq p$, por lo que no es válido para los siguientes casos:

a) Las ecuaciones de Claireaut $y = xy' + \varphi(y')$ que estudiaremos aparte.

b) Las soluciones lineales de la ecuación (29) de la forma

$$y = p_0 . x + \varphi(p_0) \tag{33}$$

siendo $p_0$ una raiz de la ecuación $f(p) = p$.

Estas rectas, si existen, satisfacen la ecuación (29) como se puede comprobar trivialmente. Si $\varphi(p_0)$ no está definida, la recta, esto es la solución (33), no existe. Pero si $\varphi(p_0)$ está definida puede ocurrir que la recta (33) pertenezca o no al haz integral que definían las ecuaciones (32) y (30). Cuando no pertenece, se dice que la recta (33) es una solución singular de la ecuación (29).

## 10.5.- Ecuación de Claireaut.-

Es el caso particular excluido antes en la ecuación de Lagrange, cuando $f(y') = y'$,

$$y = x . y' + \varphi(y') \tag{34}$$

Haciendo $y' = p$ queda

$$y = px + \varphi(p) \tag{35}$$

derivando respecto de x, se obtiene

$$p = p + x . \frac{dp}{dx} + \varphi'(p) . \frac{dp}{dx}, \text{ luego}$$

$$\frac{dp}{dx} [x + \varphi'(p)] = 0$$

Por tanto, o bien

a) $dp/dx = 0$, o sea $p = c$ que da como integral general

$$y = c . x + \varphi(c) \qquad \text{o bien}$$

b) $x + \varphi'(p) = 0$ que junto con la (35)

$y = px + \varphi(p)$ nos da una solución que no depende de ninguna constante arbitraria y que llamaremos solución singular de (34).

Se observa que:

1º) La integral general de la ecuación de Claireaut se obtiene sustituyendo y' por c en la ecuación.

$$y = c.x + \varphi(c)$$

2º) La integral singular es la envolvente del haz integral.

$$\left\{\begin{array}{l} y = c.x + \varphi(c) \\ 0 = x + \varphi'(c) \end{array}\right\} \quad \text{o sea}$$

$$\left\{\begin{array}{l} x = -\varphi'(c) \\ y = -c.\varphi(c) + \varphi(c) \end{array}\right.$$

<u>Ejemplos</u>.

1.- Resolver

$$x . y' + y = (y')^3$$

---

Haciendo $y' = p$ queda

$$px + y = p^3 \quad \text{derivando respecto de } x$$

$$p + x\frac{dp}{dx} + \frac{dy}{dx} = 3p^2 . \frac{dp}{dx}$$

$$2p + x.\frac{dp}{dx} = 3p^2 . \frac{dp}{dx}$$

$$2p . \frac{dx}{dp} + x = 3p^2$$

que es una lineal. Se resuelve y sale

$$x = c.p^{-\frac{1}{2}} + \frac{3}{5}p^2 \quad \text{y de la ecuación}$$

$$px + y = p^3 \quad \text{se obtiene}$$

$$y = -c.p^{\frac{1}{2}} + \frac{2}{5}p^3$$

Con lo que ya tenemos x e y en función del parámetro p.

2.- Resolver

$$y = x(1 + y') + y'^2$$

---

Haciendo $y' = p$, $y = x(1 + p) + p^2$, derivando

$$p = 1 + p + x.\frac{dp}{dx} + 2p\frac{dp}{dx}$$

$$\frac{dp}{dx}(x + 2p) + 1 = 0$$

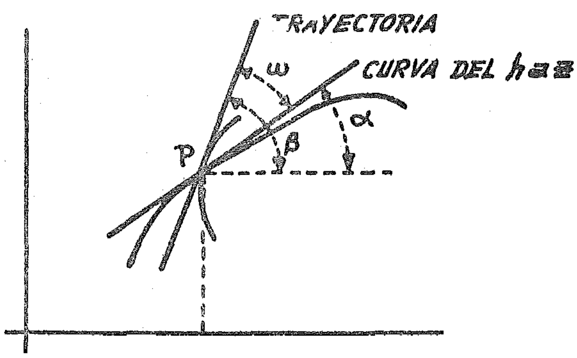
$$\frac{dx}{dp} + x + 2p = 0 \qquad \text{ecuación lineal}$$

$$\frac{dx}{dp} + x = -2p \qquad \text{integrando sale}$$

$$\left.\begin{aligned} x &= e^{-p}\left[K-2\int p.e^{p}.dp\right] = K.e^{-p} - 2p+2 \\ y &= x(1+p) + p^2 = K.e^{-p}(1+p) + 2-p^2 \end{aligned}\right\}$$

11.- Trayectorias de un haz de curvas planas.-

Dado un haz de curvas planas $f(x, y, k) = 0$, se llaman trayectorias de él a las curvas que cortan a las del haz según un ángulo constante.




Sea $y = y(x)$ una curva del haz que pasa por $p(x_0, y_0)$.

La tangente a la curva en P forma con el eje OX un ángulo $\alpha$, tal que

$$y'_0 = \operatorname{tg}\alpha$$

Sea $\omega$ el ángulo constante citado anteriormente. Según el sentido del ángulo $\omega$, el ángulo que la trayectoria forma con el eje OX será $Y'_0 = \operatorname{tg}\beta$, siendo

$$\beta = \alpha \pm \omega \quad \text{y por lo tanto}$$

$$\alpha = \beta \mp \omega$$

$$\operatorname{tg}\alpha = \operatorname{tg}(\beta \mp \omega) = \frac{\operatorname{tg}\beta \mp \operatorname{tg}\omega}{1 \pm \operatorname{tg}\beta . \operatorname{tg}\omega}$$

y quedará

$$y' = \frac{Y' \mp \operatorname{tg}\omega}{1 \pm Y' . \operatorname{tg}\omega}$$

Luego si es $\varphi(x, y, y') = 0$ la ecuación del haz dado, la de las trayectorias se obtendrá sustituyendo la relación anterior en la ecuación del haz, y quedará:

$$\varphi\left(x, y, \frac{y' \mp \operatorname{tg}\omega}{1 \pm y' . \operatorname{tg}\omega}\right) = 0$$

Caso particular es el de las trayectorias ortogonales, o sea cuando $\omega = 90^{\circ}$; $\operatorname{tg} = \infty$ y por lo tanto bastará sustituir $y'$ por $-1/y'$ quedando como ecuación diferencial de las trayectorias ortogonales

$$\varphi\left(x, y, -\frac{1}{y'}\right) = 0$$

# 10

# Ecuaciones Diferenciales de Orden Superior al Primero. Diferentes Tipos

## L E C C I O N 10

## ECUACIONES DIFERENCIALES DE ORDEN SUPERIOR AL PRIMERO. DIFERENTES TIPOS

### 1.- Definiciones generales.-

Ya se definió en la lección anterior como ecuación diferencial de orden n a una relación de la forma:

$$F\left(x, y, \frac{dy}{dx}, \frac{d^2y}{dx^2}, \ldots, \frac{d^ny}{dx^n}\right) = 0$$

o en forma normal, es decir con la $y^{(n}$ despejada

$$y^{(n} = f(x, y, y', y'', \ldots, y^{(n-1})$$

Integrar la ecuación diferencial es determinar las funciones $y = y(x)$ que la satisfacen. Es lógico suponer que si pocos eran los casos en que éstas se podían determinar, en las ecuaciones de primer orden, al ser de orden superior al primero, serán muchos menos los casos en que podamos expresar la solución.

Supongamos una ecuación finita dada:

$$\varphi(x, C_1, C_2, \ldots, C_n) = 0$$

con $\underline{n}$ parámetros $C_1, C_2, \ldots, C_n$ independientes. Si dicha familia de curvas se puede derivar $\underline{n}$ veces respecto a $x$, se obtendría las relaciones:

$$\varphi'_x + \varphi'_y . y' = 0$$

$$\varphi''_{x^2} + 2\,\varphi''_{xy} . y' + \varphi''_{y^2} . y'^2 + \varphi'_y . y'' = 0$$

- - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - -

Si de la ecuación dada y de sus $\underline{n}$ primeras derivadas, podemos eliminar los parámetros $C_1, C_2, \ldots, C_n$, se obtendrá una ecuación de la forma:

$$F(x, y, y', \ldots, y^{(n}) = 0$$

que llamamos ecuación diferencial de la familia de curvas $\varphi$ . A su vez decimos que $\varphi$ es la integral general de la ecuación diferencial F.

Antes de dar algunas reglas prácticas para la resolución de estas ecua -

ciones diferenciales, veamos las condiciones de existencia y unicidad de solución de las mismas.

2.- Teorema de existencia y unicidad.-

Consideremos la ecuación diferencial de orden n:

$$y^{(n} = f(x, y, y', \ldots, y^{(n-1})$$

Podemos expresar de modo sencillo el teorema de existencia y unicidad de la solución, considerándola como un sistema de ecuaciones para el que se demostró anteriormente dicho teorema.

Considerando como funciones desconocidas además de y, $y' = y_1$, $y'' = y_2, \ldots, y^{(n-1} = y_{n-1}$, la ecuación se puede sustituir por el sistema

$$\begin{cases} y' = y_1 \\ y'_1 = y_2 \\ \ldots\ldots\ldots \\ y'_{n-2} = y_{n-1} \\ y'_{n-1} = f(x, y, y_1, \ldots, y_{n-1}) \end{cases}$$

De acuerdo con el teorema de existencia para sistemas, si los segundos miembros de todas las ecuaciones que lo constituyen son continuos en la región R considerada y satisfacen la condición de Lipschitz respecto a todas las variables, excepto x, se puede asegurar que existe una solución única del sistema que cumple:

$$y(x_0) = y_0, \ y_1(x_0) = y_{10}, \ldots, y_{n-1}(x_0) = y_{n-1,0}$$

Los segundos miembros de las n-1 primeras ecuaciones del sistema cumplen ser continuos y satisfacen no sólo de condición de Lipschitz, sino también la de existencia de derivadas acotadas respecto a $y, y_1, y_2, \ldots, y_{n-1}$. Por lo tanto, las condiciones del teorema se cumplirán si el segundo miembro de la n-sima ecuación $f(x, y, y_1, \ldots, y_{n-1})$ es continuo en un entorno de las condiciones iniciales y satisface la condición de Lipschitz para todas las variables, excepto x, ó más generalmente existen las derivadas parciales acotadas respecto a todas las variables, excepto x.

Así pues, podemos enunciar el siguiente teorema de existencia y unicidad de la solución:

"Si en un entorno de las condiciones iniciales $(x_0, \ y_0, \ y'_0, \ldots, y_0^{(n-1})$, la función f es continua y satisface la condición de Lipschitz respecto a todas sus variables, con excepción de x, podemos asegurar que existe una **solución única** de la ecuación diferencial $y^{(n} = f(x, y, y', \dots, y^{(n-1})$ que satisface las condiciones: $y(x_0) = y_0,\ y'(x_0) = y'_0, \dots, y^{(n-1}(x_0) = y_0^{(n-1}$".

La última condición puede sustituirse por la existencia, en el entorno considerado, de las derivadas parciales acotadas de f respecto de todas sus variables, excepto x.

Se llama solución general de una ecuación diferencial de orden n al conjunto de soluciones formado por todas las soluciones particulares, sin excepción. De lo anterior, se deduce que dicha solución general depende de n parámetros.

3.- Ecuaciones cuyo orden puede rebajarse.-

3.1.- Ecuaciones en las que falta la variable x.-

Son de la forma:

$$F(y, y', \dots, y^{(n}) = 0$$

Se puede reducir el orden de la ecuación en una unidad, mediante el cambio $y' = p$, tomando p como nueva función é y como variable del siguiente modo:

$$\frac{dy}{dx} = y' = p$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{dp}{dx} = \frac{dp}{dy} \cdot \frac{dy}{dx} = \frac{dp}{dy} \cdot p$$

$$\frac{d^3y}{dx^3} = \frac{d}{dx}\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right) = \frac{d}{dx}\left(\frac{dp}{dy}p\right) = \frac{d}{dy}\left(\frac{dp}{dy}p\right)\frac{dy}{dx} = \frac{d^2p}{dy^2} \cdot p^2 + \left(\frac{dp}{dy}\right)^2 \cdot p$$

---

Al sustituir las derivadas en la ecuación diferencial, ésta se transforma en otra de un orden inferior de la forma:

$$\varphi(y, p, p', \dots, p^{(n-1}) = 0$$

Integrándola, si es posible, se obtendrá:

$$p = \Psi(y, C_1, C_2, \dots, C_{n-1}) = \frac{dy}{dx}$$

y de aquí:

$$x = \int \frac{dy}{\Psi(y, C_1, C_2, \ldots, C_{n-1})} + C_n$$

En algunos casos, será más sencillo obtener la solución en paramétricas, o sea:

$$y = \Psi_1(p, C_1, C_2, \ldots, C_{n-1}) \quad y \quad p = \frac{dy}{dx}$$

$$x = \int \frac{dy}{p} + C_n = \int \frac{\Psi'_1}{p} . dp + C_n$$

Quedando $x$ é $y$ en función del parámetro $p$. Si se puede eliminar $p$ de ambas, se obtendría la solución en cartesianas.

3.2.- Ecuaciones en las que falta $y$ y sus $(k-1)$ primeras derivadas.-

Son de la forma:

$$F(x, y^{(k}, y^{(k+1}, \ldots, y^{(n}) = 0$$

Se puede reducir a otra ecuación de orden $(n-k)$, mediante el cambio:

$$y^{(k} = p$$

En efecto:

$$y^{(k+1} = p', \ldots, y^{(n} = p^{(n-k}$$

Y la ecuación quedará así:

$$\varphi (x, p, p', \ldots, p^{(n-k}) = 0$$

y se obtendrá:

$$p = p(x, C_1, C_2, \ldots, C_{n-k}) = y^{(k}$$

que integrada $k$ veces, nos dará la solución general buscada.

3.3.- Ecuaciones en las que falta la $x$ y la $y$.-

Son de la forma:

$$\varphi (y', y'', \ldots, y^{(n}) = 0$$

se puede aplicar el primer procedimiento, o el segundo (para $k = 1$) caso particular lo ofrecen las ecuaciones de segundo orden

$$y'' = f(y')$$

con el cambio $y' = p$ se obtiene:

$$y'' = \frac{dp}{dx} = f(p); \; dx = \frac{dp}{f(p)}$$

$$x = \int \frac{dp}{f(p)} + C_1; \; dy = pdx = p \cdot \frac{dp}{f(p)}$$

$$y = \int p \cdot \frac{dp}{f(p)} + C_2$$

que nos dan las ecuaciones paramétricas de $\underline{x}$ é $\underline{y}$ en función del parámetro p.

3.4.- Ecuaciones de la forma $\frac{d}{dx}\varphi(x, y, y', \ldots, y^{(n-1)}) = 0$.-

O sea, puede expresarse como la derivada de cierta expresión diferencial de orden (n-1).

Mediante una primera integral, la convertimos en otra de una orden inferior:

$$\varphi(x, y, y', \ldots, y^{(n-1)}) = C_1$$

A veces, sólo se puede expresar de esta forma la ecuación, después de multiplicarla por un cierto factor integrante:

$$\mu = \mu(x, y, y', \ldots, y^{(n-1)})$$

Téngase en cuenta que al multiplicar por dicho factor, se pueden introducir soluciones extrañas, que resultan de hacer $\mu = 0$. Asimismo, si $\mu$ es discontinuo, pueden también perderse soluciones.

3.5.- Ecuaciones homogéneas en $y, y', \ldots, y^{(n)}$.-

O sea son ecuaciones de la forma:

$$F(x, y, y', y'', \ldots, y^{(n)}) = 0$$

tales que se cumple:

$$F(x, \lambda y, \lambda y', \lambda y'', \ldots, \lambda y^{(n)}) = \lambda^k . F(x, y, y', y'', \ldots, y^{(n)})$$

siendo k el grado de homogeneidad.

Tomando $\lambda = \frac{1}{y}$, queda:

$$F\left(x, 1, \frac{y'}{y}, \frac{y''}{y}, \ldots, \frac{y^{(n)}}{y}\right) = \frac{1}{y^k} . F(x, y, y', y'', \ldots, y^{(n)})$$

los valores que anulan al segundo miembro, anulan también al primero.

Por lo tanto, la ecuación dada es equivalente a la siguiente:

$$F(x, 1, \frac{y'}{y}, \frac{y''}{y}, \dots, \frac{y^{(n}}{y}) = 0$$

Efectuemos el cambio:

$$\frac{y'}{y} = U; \; y' = U \, . \, y$$

$$y'' = U'y + U.\, y' = U'y + U^2 y = (U' + U^2)y; \; \frac{y''}{y} = U' + U^2$$

$$y''' = (U'' + 2UU')y + (U' + U^2)y' = y(U'' + 3UU' + U^3); \; \frac{y'''}{y} = U'' + 3UU' + U^3$$

---

Sustituyendo obtendremos otra ecuación de un orden inferior a la dada

$$\varphi(x, U, U', \dots, U^{(n-1}) = 0$$

Caso particular lo ofrece la ecuación lineal homogénea de segundo orden.

$$y'' + a_1(x).\, y' + a_2(x)y = 0$$

Efectuando el cambio anterior se transforma en la ecuación de Riccati.

$$U' + U^2 + a_1(x) \, . \, U + a_2(x) = 0$$

4.- Ejemplos.-

4.1.- Resolver:

$$y'' = (y')^3 + y'$$

como no tiene x, efectuamos el cambio $y' = p$, $y'' = \frac{dp}{dy} \, . \, p$ y queda:

$$p \frac{dp}{dy} = p^3 + p; \; \frac{dp}{dy} = p^2 + 1$$

con lo que hemos quitado la solución trivial $p = 0$; $y =$ constante.

$$\frac{dp}{p^2+1} = dy; \; \text{arctg } p = y + C_1; \; p = \frac{dy}{dx} = \text{tg } (y + C_1)$$

$$dx = \text{cotg}(y + C_1); \; x + LC_2 = L \text{ sen}(y+C_1); \; \text{sen}(y + C_1) = C_2 . e^x; \; y = \text{arc sen } C_2 e^x - C_1$$

4.2.- Resolver: $(y''')^2 + x.y''' - y'' = 0.$

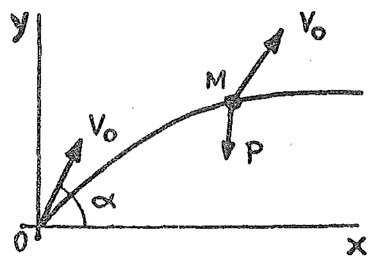
Faltan y é y'; efectuamos el cambio $y'' = p$ con lo que queda:

$$\left(\frac{dp}{dx}\right)^2 + x \, . \, \frac{dp}{dx} - p = 0; \; p = x . \frac{dp}{dx} + \left(\frac{dp}{dx}\right)^2 \text{ (ecuación de Claireaut)}$$

$$p = \frac{d^2y}{dx^2} = Cx + C^2; \; \frac{dy}{dx} = \frac{Cx^2}{2} + C^2x + C_1$$

$$y = \frac{Cx^3}{6} + \frac{C^2x^2}{2} + C_1x + C_2$$

4.3.- Sea un proyectil de peso P lanzado con un ángulo $\alpha$ sobre el plano vertical. Determinar la forma de su trayectoria, despreciando la resistencia del aire.




Sea $V_0$ la velocidad inicial. Consideremos un punto M de la trayectoria, al cabo del tiempo t después del lanzamiento, M(x, y).

Siendo la gravedad la única fuerza aplicada al proyectil, proyectamos so_ bre los dos ejes, teniendo en cuenta F = m.a.

$$m \, . \, \frac{d^2x}{dt^2} = 0 \qquad \frac{d^2x}{dt^2} = 0; \; \frac{dx}{dt} = \text{constante} = V_0 \cos\alpha$$

$$m \, . \, \frac{d^2y}{dt^2} = - P = -mg \qquad x = V_0 . \cos\alpha \, . t + C$$

para t = 0, x = 0, por lo que C = 0. $x = V_0 . t . \cos\alpha$.

También:

$$\frac{d^2y}{dt^2} = -g; \; \frac{dy}{dt} = -gt + k$$

para t = 0, $\frac{dy}{dt} = V_0 . \operatorname{sen}\alpha ; \; V_0 \operatorname{sen}\alpha = 0 + k.$

por lo que:

$$\frac{dy}{dt} = -gt + V_0 . \operatorname{sen}\alpha$$

$$y = -\frac{1}{2} gt^2 + V_0 t \operatorname{sen}\alpha + k'$$

para $t = 0$, $y = 0$, por lo que $k' = 0$ y queda:

$$y = -\frac{1}{2} gt^2 + V_0 t \operatorname{sen}\alpha$$

Tenemos $\underline{x}$ é $\underline{y}$ en paramétricas; eliminando t saldrá:

$$t = \frac{x}{V_0 \cos\alpha}$$

$$y = -\frac{1}{2} \frac{g x^2}{V_0^2 \cos^2\alpha} + x \operatorname{tg}\alpha$$

---

4.4.- Resolver

$$2yy'' = 1 + (y')^2$$

Falta la variable x. Hacemos el cambio: $y' = p$ y queda:

$$2y.p' = 1 + p^2;\ 2y \frac{dp}{dx} = 1 + p^2$$

$$\frac{dp}{dx} = \frac{dp}{dy} . p;\ 2yp . \frac{dp}{dy} = 1 + p^2$$

separando variables e integrando:

$$\int \frac{2p\, dp}{1+p^2} = \int \frac{dy}{y};\ L(1 + p^2) = Ly + C$$

$$\frac{1 + p^2}{y} = C_1;\ p = \pm \sqrt{C_1 . y - 1}$$

$$\frac{dy}{dx} = \pm \sqrt{C_1 y - 1};\ \int \frac{dy}{\sqrt{C_1 y - 1}} = \pm \int dx$$

$$2 \sqrt{C_1 y - 1} = \pm C_1 x + C_2$$

## 5.- Ecuaciones diferenciales lineales de orden n.-

### 5.1.- Definiciones.-

Se llama ecuación diferencial lineal de orden n, a la que es lineal con respecto a la función desconocida y a sus derivadas. O sea es de la forma:

$$a_0(x) \cdot y^{(n} + a_1(x) \cdot y^{(n-1} + \dots + a_{n-1}(x) \cdot y' + a_n(x) . y = \varphi(x)$$

Si el segundo miembro $\varphi(x) \equiv 0$, la ecuación se llama lineal **homogénea** ó incompleta.

Cuando $\varphi(x) \equiv 0$ decimos que la ecuación es no homogénea o completa.

Si $a_0(x) \neq 0$, para todos los valores de x, $a \leqslant x \leqslant b$, dividiendo por $a_0(x)$ la homogénea, se reduce en dicho segmento a la ecuación.

$$y^{(n} + p_1(x) . y^{(n-1} + \dots + p_{n-1}(x) . y' + p_n(x) . y = 0 \qquad (1)$$

ó lo que es lo mismo:

$$y^{(n} = - \sum_{i=1}^{n} p_i(x), \ y^{(n-i} \qquad (2)$$

Si los coeficientes $p_i(x)$ son continuos en el segmento $a \leqslant x \leqslant b$, en un entorno de cualesquiera condiciones iniciales:

$$a \leqslant x_0 \leqslant b; \ y(x_0) = y_0, \ y'(x_0) = y'_0, \dots, y^{(n-1}(x_0) = y_0^{(n-1}$$

se satisfacen las condiciones del teorema de existencia y unicidad.

En efecto, el segundo miembro de (2) es continuo en todas sus variables en conjunto, y existen las derivadas parciales $\dfrac{\partial f}{\partial y^{(k}} = - p_{n-k}(x)$, ($k = 0, 1, \dots, n-1$), de módulo acotado, ya que las funciones $p_{n-k}(x)$ son continuas en el intervalo $a \leqslant x \leqslant b$ y por lo tanto, están acotadas en valor absoluto.

Veamos ahora algunas de las notaciones que se utilizan en los **métodos** operacionales. Introduzcamos la notación:

$$y^{(k} = \frac{d^k y}{dx^k} = D^k y$$

Con ella la ecuación diferencial se escribe así:

$$a_0 D^n y + a_1 D^{n-1} y + \dots + a_n y = \varphi(x)$$

o simbólicamente:

$$(a_0 D^n + a_1 D^{n-1} + \dots + a_{n-1} D + a_n) y = \varphi(x)$$

A la expresión:

$$a_0 D^n + a_1 D^{n-1} + \dots + a_{n-1} D + a_n$$

se la llama polinomio operacional y se la representa por la notación P(D). Este operador representa un conjunto de operaciones a realizar con la función que se coloque a su derecha.

Es fácil comprobar las siguientes propiedades del operador P(D):

a) Permutabilidad con constantes.-

$$P(D)(Cy) = C \,.\, P(D)y$$

b) Distributivas.-

$$P(D)\ (y_1 + y_2) = P(D)y_1 + P(D)y_2$$

$$[P_1(D) + P_2(D)]\, y = P_1(D)y + P_2(D)y$$

c) Producto de dos operadores.-

Si es $P_1(D) \,.\, P_2(D)y = P_1(D)[P_2(D)y]$.

se tiene:

$$P_1(D) \,.\, P_2(D)y = P_2(D) \,.\, P_1(D)y$$

$$P(D)[P_1(D) + P_2(D)]\, y = P(D) \,.\, P_1(D)y + P(D) \,.\, P_2(D)\, y$$

d) $P(D)e^{kx} \equiv e^{kx} \,.\, P(k)$

e) $P(D^2)\text{sen } ax \equiv \text{sen } ax.\ P(-a^2)$

f) $P(D^2)\cos ax \equiv \cos ax \,.\, P(-a^2)$

g) $P(D)\ e^{kx} \,.\, v(x) \equiv e^{kx} \,.\, P(D + k)\ v(x)$

h) Operador 1/P(D).

El resultado de aplicar el operador $\dfrac{1}{P(D)}$ a cierta función continua f(x) es la solución de la ecuación:

$$P(D)y = f(x)$$

Luego:

$$P(D)\left[\frac{1}{P(D)} f(x)\right] \equiv f(x)$$

Otro operador importante es el operador diferencial lineal **L[y] que se de fine a continuación.**

Sea la ecuación lineal homogénea:

$$y^{(n} + p_1(x) \cdot y^{(n-1} + \ldots + p_n(x) \cdot y = 0$$

En forma compacta se escribiría:

$$L[y] = 0$$

siendo

$$L[y] = y^{(n} + p_1(x)\, y^{(n-1} + \ldots + p_n(x) y$$

el operador diferencial lineal. **Sus principales propiedades son las siguientes:**

a) Permutabilidad con constantes.-

$$L[Cy] \equiv C \cdot L[y]$$

b) Distributiva.-

$$L[y_1 + y_2] \equiv L[y_1] + L[y_2]$$

c)

$$L\left[\sum_{i=1}^{n} C_i y_i\right] = \sum_{i=1}^{n} C_i\, L[y_i]$$

5.2.- Teoremas sobre las soluciones de la ecuación incompleta.-

a) Si $y_1$ es una solución de la ecuación lineal **homogénea $P(D)y = 0$, y C** es una constante arbitraria, la expresión $C \cdot y_1$ **es también solución de la ecuación.**

En efecto, por hipótesis $P(D)\, y_1 \equiv 0$

$$P(D)\, Cy_1 = C \cdot P(D)\, y_1 \equiv 0$$

Luego $C\, y_1$ es también solución.

b) La suma $y_1 + y_2$ de dos soluciones particulares $y_1$ é $y_2$ **de la ecuación** lineal homogénea $P(D)\, y = 0$, es solución de dicha ecuación.

Por hipótesis $P(D)y_1 \equiv 0$, $P(D)y_2 \equiv 0$.

$$P(D)\ (y_1 + y_2) = P(D)y_1 + P(D)y_2 \equiv 0$$

Luego $y_1 + y_2$ es también solución.

c) Como corolario de los teoremas anteriores, se puede enunciar que toda combinación lineal con coeficientes constantes arbitrarios $\sum_{i=1}^{m} C_i . y_i$ de las soluciones particulares $y_1, y_2, \ldots, y_m$ de la ecuación lineal homogénea $P(D)y = 0$ es también solución de dicha ecuación.

En efecto:

$$P(D) \sum_{i=1}^{n} C_i . y_i = P(D)\ (C_1\ y_1 + C_2 y_2 + \ldots + C_m\ y_m) =$$

$$= C_1 . P(D)y_1 + C_2 . P(D)y_2 + \ldots + C_m . P(D)y_m \equiv 0$$

Luego $C_1 y_1 + C_2 y_2 + \ldots + C_m\ y_m$ es también solución de la ecuación diferencial.

d) Si la ecuación lineal homogénea $P(D)y = 0$, con coeficientes reales $a_i(x)$, tiene la solución compleja $y_1(x) = U(x) + jv(x)$, la parte real $U(x)$ y la imaginaria $v(x)$ son por separado soluciones de dicha ecuación.

Por hipótesis: $P(D)\ (U + jv) \equiv 0$

pero:

$$P(D)\ (U + jv) = P(D)U + jP(D)v \equiv 0$$

lo que implica

$$P(D)U \equiv 0 \quad y \quad P(D)v \equiv 0$$

ya que una función compleja de variable real es idénticamente nula si, y sólo si, sus partes real e imaginaria son idénticamente nulas. Por lo tanto $U(x)$ y $v(x)$ son solución de la ecuación.

5.3.- Dependencia e independencia lineal.-

Para expresar la integral general de la ecuación homogénea, conviene determinar las condiciones que deben cumplir n funciones $y_1(x), y_2(x), \ldots, y_n(x)$ para que una de ellas pueda expresarse como combinación lineal de las demás.

Si en el intervalo de variación de x, $a \leqslant x \leqslant b$, la ecuación

$$\alpha_1 . y_1 + \alpha_2 . y_2 + \ldots + \alpha_n . y_n = 0 \qquad (1)$$

se satisface para por lo menos un $\alpha_i \neq 0$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$, decimos que las funciones $y_1, y_2, \ldots, y_n$ son linealmente dependientes en dicho intervalo.

Por el contrario, si la ecuación (1) sólo se verifica para $\alpha_1 = \alpha_2 = \ldots = \alpha_n = 0$, decimos que dichas funciones son linealmente independientes en el intervalo $[a, b]$ de variación de $x$.

Si derivamos la identidad (1) $(n-1)$ veces se obtiene:

$$\left.\begin{array}{l} \alpha_1 y_1 + \alpha_2 y_2 + \ldots + \alpha_n y_n \equiv 0 \\ \alpha_1 \cdot y_1' + \alpha_2 \cdot y_2' + \ldots + \alpha_n \cdot y_n' \equiv 0 \\ \text{- - - - - - - - - - - - - - - - -} \\ \alpha_1 y_1^{(n-1} + \alpha_2 \cdot y_2^{(n-1} + \ldots + \alpha_n \cdot y_n^{(n-1} \equiv 0 \end{array}\right\} \qquad (2)$$

Obtenemos un sistema lineal y homogéneo, con incógnitas $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$. El determinado del sistema essel wronskiano $W(x) = W[y_1, y_2, \ldots, y_n]$ relativo a las n funciones (se llama así en honor el matemático polaco Wronsky).

$$W = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 & \ldots & y_n \\ y_1' & y_2' & \ldots & y_n' \\ y_1^{(n-1} & y_2^{(n-1} & \ldots & y_n^{(n-1} \end{vmatrix} \qquad (3)$$

Si $W \equiv 0$ en el intervalo $a \leqslant x \leqslant b$, el sistema (a) es compatible é indeterminado; admite por lo tanto soluciones para $\alpha_i \neq 0$, y las funciones $y_1, y_2, \ldots, y_n$ decimos que son linealmente dependientes en dicho intervalo.

Si $W \neq 0$ en el intervalo $a \leqslant x \leqslant b$, el sistema (2) es incompatible y sólo admite la solución trivial de todo sistema lineal homogéneo $\alpha_1 = \alpha_2 = \ldots = \alpha_n = 0$, por lo que las funciones $y_1, y_2, \ldots, y_n$ decimos que son linealmente independientes en dicho intervalo.

Vamos a demostrar ahora que si las funciones linealmente independientes $y_1, y_2, \ldots, y_n$ son soluciones de la ecuación lineal homogénea

$$y^{(n} + p_1(x) \cdot y^{(n-1} + \ldots + p_n(x) \cdot y = 0 \qquad (4)$$

con coeficientes continuos $p_i(x)$ en el intervalo $a \leqslant x \leqslant b$, entonces el wronskiano $W(x) = W[y_1, y_2, \ldots, y_n]$, (3), es distinto de cero en todos los puntos del intervalo $a \leqslant x \leqslant b$.

Vamos a demostrarlo por reducción al absurdo. Supongamos un punto $x_0$ de dicho intervalo donde $W(x_0) = 0$. Elijamos constantes $\alpha_i (i = 1, 2, \ldots, n)$, no to das nulas, y que satisfagan el sistema de ecuaciones:

$$\left.\begin{array}{l} \alpha_1 \cdot y_1(x_0) + \alpha_2\, y_2(x_0) + \ldots + \alpha_n\, y_n(x_0) = 0 \\ \alpha_1 \cdot y_1'(x_0) + \alpha_2 \cdot y_2'(x_0) + \ldots + \alpha_n \cdot y_n'(x_0) = 0 \\ \text{- - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - -} \\ \alpha_1 \cdot y_1^{(n-1}(x_0) + \alpha_2 \cdot y_2^{(n-1}(x_0) + \ldots + \alpha_n \cdot y_n^{(n-1}(x_0) = 0 \end{array}\right\} \qquad (5)$$

La determinación de estas constantes $\alpha_i$ es posible, ya que el determinante del sistema $|W(x_0)| = 0$ y por lo tanto admite soluciones $\alpha_i$ distintas de cero por ser compatible. Para dichos valores $\alpha_i$ la función:

$$y = \alpha_1 \cdot y_1(x) + \alpha_2 \cdot y_2(x) + \ldots + \alpha_n \cdot y_n(x)$$

es solución de la ecuación $P(D)y = 0$ por ser combinación lineal de soluciones particulares de la misma, cumpliéndose además debido a las ecuaciones del sistema (5), las condiciones iniciales nulas

$$y(x_0) = 0, \quad y'(x_0)=0, \ldots, \quad y^{(n-1}(x_0) = 0 \qquad (6)$$

Estas condiciones iniciales son satisfechas evidentemente por la solución trivial de la ecuación (4), $y \equiv 0$, y de acuerdo con el teorema sobre la unicidad de la solución, a las condiciones iniciales (6) las satisface sólo dicha solución. Luego $\alpha_1 \cdot y_1(x) + \alpha_2 \cdot y_2(x) + \ldots + \alpha_n \cdot y_n(x) \equiv 0$ y las funciones $y_1, y_2, \ldots, y_n$, contrariamente a la hipótesis del teorema, son linealmente dependientes.

5.4.- Integral general de la ecuación homogénea.-

Toda combinación lineal con coeficientes constantes arbitrarios

$$y = C_1 \cdot y_1 + C_2 \cdot y_2 + \ldots + C_n \cdot y_n = \sum_{i=1}^{n} C_i y_i \qquad (7)$$

de n soluciones particulares, linealmente independientes, $y_1, y_2, \ldots, y_n$, en el intervalo $a \leqslant x \leqslant b$, de una ecuación lineal homogénea de orden n, $P(D)y = 0$, con coeficientes continuos $p_i(x)$ en dicho intervalo, es solución general de la misma.

En efecto, la ecuación satisface las condiciones del teorema de existencia y unicidad en el intervalo $[a, b]$. Por lo tanto, la solución

$$y = \sum_{i=1}^{n} C_i \cdot y_i \quad , \quad a \leqslant x \leqslant b$$

será general, ó sea, contendrá a todas las soluciones particulares sin excepción, si se pueden determinar las constantes arbitrarias $C_i$, de tal modo que se satisfagan las condiciones iniciales dadas arbitrariamente.

$$y(x_0) = y_0, \quad y'(x_0) = y_0', \ldots, \quad y^{(n-1}(x_0) = y_0^{(n-1}; \quad a \leqslant x_0 \leqslant b$$

Derivando (7) y particularizando para $x_0$ queda el sistema lineal de $n$ ecuaciones, con incógnitas $C_1, C_2, \ldots, C_n$.

$$\left.\begin{array}{l} \sum\limits_{i=1}^{n} C_i \cdot y_i(x_0) = y_0 \\ \sum\limits_{i=1}^{n} C_i \cdot y_i'(x_0) = y_0' \\ \text{- - - - - - - - - - - -} \\ \sum\limits_{i=1}^{n} C_i \cdot y_i^{(n-1}(x_0) = y_0^{(n-1} \end{array}\right\}$$

el determinante del sistema es el wroskiano $W(x_0)$ que es distinto de cero por ser las funciones $y_1, y_2, \ldots, y_n$ linealmente independientes, luego el sistema es compatible y determinado y se podrán determinar de modo único las incógnitas $C_1, C_2, \ldots, C_n$ para cada valor $x_0$, $a \leqslant x_0 \leqslant b$.

Así pues, "la integral general de una ecuación lineal homogénea de orden n se obtiene formando una combinación lineal de n soluciones particulares linealmente independientes de la misma".

Si se conoce una solución particular no trivial $y = y_1(x)$ de la ecuación lineal homogénea

$$P(D)y = 0 \tag{8}$$

se puede, mediante el cambio $y = y_1 \cdot \int U dx$, reducir su orden manteniendo la linealidad y la homogeneidad.

En efecto, el cambio $y = y_1 \cdot \int U dx$, se puede reemplazar por dos sustituciones $y = y_1 . z$ y $z' = U$. La primera de ellas es una transformación lineal homogénea y conserva la linealidad y homogeneidad de la ecuación (8), transformándola en otra de la forma:

$$b_0(x) . z^{(n} + b_1(x) . z^{(n-1} + \ldots + b_n(x) \ . \ z = 0 \tag{9}$$

A la solución $y = y_1$ de la (8), le corresponde, en función del cambio $y = y_1 z$, la solución $z = 1$ en la ecuación (9). Sustituyendo $z = 1$ en (9) se obtiene

$b_n(x) \equiv 0$ y la (9) queda así:

$$b_0(x)\ z^{(n} + b_1(x)\ z^{(n-1} + \ldots + b_{n-1}(x) z' = 0 \tag{10}$$

y la sustitución $z' = U$ la reduce a una de orden $(n-1)$.

Podemos observar que la sustitución anterior $y = y_1 \int U dx$, en la que $y_1$ es una solución particular de la homogénea (8), reduce también en un orden de la ecuación lineal no homogénea

$$P(D)y = \varphi(x) \tag{11}$$

ya que dicha sustitución no altera el segundo miembro de la ecuación (11).

Conociendo k soluciones linealmente independientes en el intervalo $a \leqslant x \leqslant b$, $y_1, y_2, \ldots, y_k$, de la ecuación lineal homogénea (8), se puede reducir su orden hasta $(n-k)$ en el mismo intervalo $a \leqslant x \leqslant b$. Basta repetir el cambio anterior k veces.

5.5.- Integral general de la ecuación completa.-

La integral general de una ecuación lineal completa

$$P(D)y = \varphi(x) \tag{12}$$

se obtiene agregando a la integral general de la incompleta una solución particular de la completa.

En efecto, sea $y = y_0$ una solución particular de la completa (11), ó sea $P(D)y_0 = \varphi(x)$, y sean $y_1, y_2, \ldots, y_n$, $\underline{n}$ soluciones particulares linealmente independientes de la ecuación homogénea.

La solución general de la homogénea será pues

$$C_1\ y_1 + C_2\ y_2 + \ldots + C_n\ y_n$$

y se tendrá.

$$P(D)(C_1 y_1 + C_2 y_2 + \ldots + C_n y_n) = 0$$

Escribamos

$$y = C_1 y_1 + C_2 y_2 + \ldots + C_n y_n + y_0 \tag{13}$$

y sustituyamos en (12)

$$P(D)(C_1y_1 + C_2y_2 +\ldots+ C_ny_n + y_0) = \varphi(x)$$

en virtud de las propiedades de P(D) se tendrá:

$$P(D)(C_1y_1 + C_2y_2 +\ldots+ C_ny_n) + P(D)\ y_0 = \varphi(x)$$

$$0 + \varphi(x) = \varphi(x)$$

La solución (13) contiene n constantes arbitrarias que pueden ser unívocamente determinadas para unas condiciones iniciales dadas arbitrariamente

$$y^{(k}(x_0) = y_0^{(k}, \quad (k = 0, 1, 2, \ldots, n-1); \ a \leqslant x \leqslant b$$

y en virtud de la unicidad de la solución, (13) será la solución general de (12).

5.6.- Método de variación de constantes.-

Si es difícil encontrar una solución particular $y = y_0$ de la ecuación completa, pero conocemos fácilmente la solución general

$$y = C_1y_1 + C_2y_2 +\ldots+ C_ny_n \tag{14}$$

de la ecuación homogénea $P(D)y = 0$, se puede hallar la integral general de la completa por el método de "variación de las constantes".

En él, se supone que la solución general de la ecuación completa

$$P(D)y = \varphi(x) \tag{15}$$

es de la misma forma que (14), pero sustituyendo las constantes $C_i$ por funciones de x, $C_i(x)$, ó sea

$$y = C_1(x).y_1 + C_2(x).y_2 +\ldots+ C_n(x).y_n \tag{16}$$

Como la única condición que deben cumplir dichas funciones $C_i(x)$, es que la función y de (16) y sus n primeras derivadas, satisfagan la ecuación diferencial (15), disponemos de (n-1) grados de libertad que podemos elegir arbitrariamente. Se escogen del modo siguiente:

$$\left.\begin{array}{l} y' = \sum_{i=1}^{n} C_i(x).y_i'(x), \text{ habiendo hecho } \sum_{i=1}^{n} C'_i(x).\ y_i(x) = 0 \\ y'' = \sum_{i=1}^{n} C_i(x).y_i''(x), \text{ habiendo hecho } \sum_{i=1}^{n} C_i'(x).y'_i(x) = 0 \\ \text{-------------------------------} \\ y^{(n-1} = \sum_{i=1}^{n} C_i(x).y_i^{(n-1}(x), \text{ habiendo hecho } \sum_{i=1}^{n} C_i'(x).y^{(n-1}(x) = 0 \end{array}\right\} \begin{array}{r}(n-1)\\ \text{ecuaciones}\\ (17)\end{array}$$

Ya hemos impuesto las (n-1) condiciones arbitrarias, por lo que la derivada n-sima quedará:

$$y^{(n} = \sum_{i=1}^{n} C_i(x).y_i^{(n}(x) + \sum_{i=1}^{n} C_i'(x)\ y_i^{(n-1}(x)$$

Sustituyendo (16), (17) y (18) en (15) y teniendo en cuenta que $y_1$, $y_2, \ldots,$ $y_n$ eran soluciones particulares de la homogénea, queda

$$a_0 \sum_{i=1}^{n} C_i'(x).y_i^{(n-1}(x) = \varphi(x) \qquad (19)$$

Esta ecuación (19), junto con las (n-1) obtenidas en (17), forman un sistema lineal no homogéneo, con determinante $W \neq 0$, compatible y determinado, que nos dará los valores de las incógnitas $C_1'$, $C'_2, \ldots, C'_n$.

$$\left.\begin{array}{l} C_1' = \Psi_1(x) \\ C_2' = \Psi_2(x) \\ \text{-------} \\ C_n' = \Psi_n(x) \end{array}\right\} \text{ integrando sale } \left\{\begin{array}{l} C_1 = k_1 + \int \Psi_1(x)dx \\ C_2 = k_2 + \int \Psi_2(x)dx \\ \text{--------------} \\ C_n = k_n + \int \Psi_n(x)dx \end{array}\right.$$

y sustituyendo en (16), obtenemos como solución general de la ecuación completa.

$$y = (k_1 + \int \Psi_1(x)dx).y_1 + \ldots + (k_n + \int \Psi_n(x)dx).y_n$$

Para unas condiciones iniciales dadas, se podrían determinar unívocamente los valores de las constantes.

También se puede aplicar este método cuando conocemos un número insuficiente de soluciones particulares de la ecuación homogénea. Si conocemos $h$ - soluciones particulares y la ecuación es de orden $n$, se puede reducir a otra de orden n-h. Vamos a aplicárselo al caso $n = 2$, $h = 1$.

Sea la ecuación completa

$$a_0(x).y'' + a_1(x).y' + a_2(x)y = \varphi(x) \tag{20}$$

y la homogénea:

$$a_0(x).y'' + a_1(x).y' + a_2(x).y = 0 \tag{21}$$

de la que se conoce sólo la solución particular $y = y_1$

$$y = C_1.y_1 \tag{22}$$

será también solución de (21). Supongamos que $C_1$ es función de x, $C_1 = C_1(x)$, y vamos a tratar de determinar dicha función para que (22) sea la solución general de (20). La única condición que se debe cumplir es que la función de (22) y sus derivadas satisfagan la ecuación (20). Como sólo hay una incógnita, no disponemos de ningún grado de libertad.

$$y = C_1.y_1$$

derivando:

$$y' = C_1.y_1' + C_1'.y_1$$

$$y'' = C_1.y_1'' + 2C_1'.y_1' + C_1''.y_1$$

sustituyendo en (20) y teniendo en cuenta que $y_1$ es solución de la homogénea queda

$$a_0(2C_1'.y_1' + C_1''.y_1) + a_1\ C_1'.y_1 = \varphi(x)$$

$$a_0.y_1.\frac{dC'}{dx} + C'(2a_0.y_1' + a_1y_1)\varphi(x)$$

que es una ecuación lineal de primer orden en C'.

Integrando saldrá:

$$C' = \Psi(x,\ k_1)$$

$$C = \int \Psi(x,\ k_1)dx + k_2$$

y sustituyendo en (22), se obtendrá la solución general de (20), de la forma:

$$y = [k_2 + \int \Psi(x,\ k_1)dx].y_1$$

5.7.- Fórmula de Liouville-Ostrogradski.-

Esta fórmula relaciona el coeficiente de $y^{(n-1}$ en una ecuación diferencial homogénea de orden n.

$$y^{(n} + p_1(x).y^{(n-1} + \ldots + p_n(x).y = 0 \tag{23}$$

y el wronskiano de n soluciones particulares linealmente independientes de ella, $y_1, y_2, \ldots, y_n$.

La integral general de (23), sería:

$$y = C_1.y_1 + C_2.y_2 + \ldots + C_n y_n \tag{24}$$

derivando n veces, se obtiene:

$$\left.\begin{array}{l} y' = C_1.y_1' + C_2.y_2' + \ldots + C_n.y_n' \\ \text{-------------------------} \\ y^{(n} = C_1.y_1^{(n} + C_2\,.\,y_2^{(n} + \ldots + C_n.y_n^{(n} \end{array}\right\} \tag{25}$$

La eliminante de las n ecuaciones (25) y la (24), nos dará la ecuación diferencial (23). Bastará expresar la compatibilidad del sistema de (n + 1) ecuaciones y n incógnitas, obteniéndose como condición

$$\begin{vmatrix} y & y_1 & y_2 & \ldots & y_n \\ y' & y_1' & y_2' & \ldots & y_n' \\ \text{--} & \text{--} & \text{--} & \text{--} & \text{--} \\ y^{(n} & y_1^{(n} & y_2^{(n} & \ldots & y_n^{(n} \end{vmatrix} = 0$$

Desarrollando por los adjuntos de la primera columna, se obtiene

$$y^{(n}.W - y^{(n-1}.W' + \ldots = 0 \tag{26}$$

siendo:

$$W = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 & \ldots & y_n \\ y_1' & y_2' & \ldots & y_n' \\ \text{--} & \text{--} & \text{--} & \text{--} \\ y_1^{(n-2} & y_2^{(n-2} & \ldots & y_n^{(n-2} \\ y_1^{(n-1} & y_2^{(n-1} & \ldots & y_n^{(n-1} \end{vmatrix} \qquad W' = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 & \ldots & y_n \\ y_1' & y_2' & \ldots & y_n' \\ \text{--} & \text{--} & \text{--} & \text{--} \\ y_1^{(n-2} & y_2^{(n-2} & \ldots & y_n^{(n-2} \\ y_1^{(n} & y_2^{(n} & \ldots & y_n^{(n} \end{vmatrix}$$

este segundo determinante es la derivada W' del wronskiano W, como se puede com probar recordando las reglas de derivación de determinantes funcionales.

Identificando (26) con (23), se obtiene:

$$P_1(x) = - \frac{W'}{W}; \quad \frac{dW}{W} = - P_1(x)dx$$

$$LW = - \int P_1(x)dx + LC; \quad W = C.e^{-\int P_1(x)dx}$$

Si $p_1(x) \equiv 0$, $W = C$ y por lo tanto se puede decir que en este caso, el wronskiano de $\underline{n}$, soluciones particulares linealmente independientes es constante.

6.- <u>Ecuaciones lineales de coeficientes constantes</u>.-

Se llaman así a las ecuaciones lineales, tales que todos los coeficientes $a_i$ son constantes; o sea son de la forma:

$$a_0.y^{(n} + a_1 y^{(n-1} + a_2.y^{(n-2} + \ldots + a_{n-1}.y' + a_n.y = \varphi(x) \qquad (27)$$

siendo $a_i$ = constante. $(i = 0, 1, \ldots, n)$, ó con notación simbólica

$$P(D)y = \varphi(x) \qquad (28)$$

Resolvamos primero la ecuación homogénea

$$a_0.y^{(n} + a_1.y^{(n-1} + \ldots + a_{n-1}.y' + a_n y = 0 \qquad (29)$$

o lo que es lo mismo:

$$P(D)y = 0 \qquad (30)$$

Las soluciones particulares de (29) pueden ser de la forma $e^{rx}$, siendo r una constante. En efecto, sustituyendo en (29), $y = e^{rx}$, $y^{(i} = r^i.e^{rx}$, $(i = 1, 2, \ldots, n)$, se obtiene:

$$(a_0.r^n + a_1 r^{n-1} + \ldots + a_{n-1}.r + a_n).e^{rx} = 0$$

como $e^{rx} \neq 0$, se tendrá:

$$a_0 r^n + a_1 r^{n-1} + \ldots + a_{n-1}.r + a_n = 0 \qquad (31)$$

A la ecuación (31) se le llama "ecuación característica". Sus raíces nos darán los valores de r para los que $e^{rx}$ es solución particular de (29). Se pueden presentar los siguientes casos:

a) Todas las raíces de la ecuación característica (31) son diferentes.-

En este caso, tenemos n soluciones particulares de la ecuación (29),

$$e^{r_1 x},\ e^{r_2 x},\ \dots,\ e^{r_n x}$$

linealmente independientes, ya que el wronskiano de ellas se lleva a un determinante de Vandermonde

$$W = \begin{vmatrix} e^{r_1 x} & e^{r_2 x} & \dots & e^{r_n x} \\ r_1 e^{r_1 x} & r_2 e^{r_2 x} & \dots & r_n e^{r_n x} \\ \hdotsfor{4} \\ r_1^{n-1} e^{r_1 x} & r_2^{n-1} e^{r_2 x} & \dots & r_n^{n-1} . e^{r_n x} \end{vmatrix} =$$

$$= e^{(r_1+r_2+\dots+r_n)x} \begin{vmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ r_1 & r_2 & \dots & r_n \\ \hdotsfor{4} \\ r_1^{n-1} & r_2^{n-1} & \dots & r_n^{n-1} \end{vmatrix} =$$

$$\begin{aligned} = e^{(r_1+r_2+\dots+r_n)x} \ . \ & (r_1-r_2).(r_1-r_3) \dots (r_1-r_{n-1}).(r_1-r_n). \\ & .(r_2-r_3) \dots (r_2-r_{n-1}).(r_2-r_n). \\ & \dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ & (r_{n-2}-r_{n-1}).(r_{n-2}-r_n). \\ & .(r_{n-1}-r_n) \end{aligned}$$

Este terminante de Vandermonde es distinto de cero, por no haber dos $r_i$ iguales.

La integral general de la (29), será:

$$y = C_1 . e^{r_1 x} + C_2 . e^{r_2 x} + \dots + C_n . e^{r_n x}$$

b) Raíces complejas de la ecuación característica.-

En el caso anterior no hemos hecho distinción respecto de que las raíces de la ecuación característica (31) fueran reales ó complejas. Es por lo tanto aplicable el mismo razonamiento para el caso de que la ecuación (31) tenga raíces complejas simples. Sin embargo, los resultados pueden escribirse de otro modo, para que no aparezcan términos complejos en ellos, si razonamos del siguiente -

modo:

Como la ecuación (31) es de coeficientes reales, si tiene una raiz compleja simple $r_1 = \alpha + \beta j$, tendrá la conjugada $r_2 = \alpha - \beta j$.

Si agrupamos las dos soluciones particulares correspondientes a estas dos raíces tendremos:

$$C_1 . e^{r_1 x} + C_2\, e^{r_2 x} = C_1\, e^{(\alpha + \beta j)x} + C_2\, e^{(\alpha - \beta j)x} = e^{\alpha x}[C_1\, e^{\beta jx} + C_2\, e^{-\beta jx}] =$$

$$= e^{\alpha x}[C_1(\cos \beta x + j \operatorname{sen} \beta x) + C_2(\cos \beta x - j \operatorname{sen} \beta x)] =$$

$$= e^{\alpha x}[A \cos \beta x + B \operatorname{sen} \beta x]$$

habiendo llamado

$$A = C_1 + C_2, \quad B = jC_1 - jC_2$$

Así pues, al par de raíces imaginarias conjugadas $\alpha \pm \beta j$, le corresponden dos soluciones particulares de (29) reales:

$$e^{\alpha x} . \cos \beta x, \quad y \quad e^{\alpha x} . \operatorname{sen} \beta x$$

c) Raíces múltiples

Si la ecuación (31) tiene raíces múltiples, se obtienen soluciones del tipo $e^{rx}$ un número menor que $n$, y por lo tanto debemos completar este número con otras soluciones particulares.

Vamos a demostrar que si la ecuación característica tiene la raiz $r_i$ de multiplicidad k, entonces serán soluciones particulares de la ecuación (29), las k funciones:

$$e^{r_i x},\ x . e^{r_i x},\ x^2 . e^{r_i x}, \ldots, x^{k-1} . e^{r_i x}$$

Para ello veamos la forma de las derivadas respecto a $r$ de la identidad

$$P(D)e^{rx} = e^{rx} . P(r)$$

y tengamos en cuenta la permutabilidad de las derivadas respecto de r y respecto de x,

$$\frac{d}{dr} P(D)e^{rx} = e^{rx}[x . P(r) + P'(r)] = 0 \qquad \text{si } r \text{ es raiz doble al menos}$$

$$\frac{d}{dr} P(D)\, e^{rx} = P(D) \frac{d\, e^{rx}}{dr} = P(D)\, x . e^{rx} = 0, \qquad \text{si r es doble al menos}$$

luego $x.e^{rx}$ satisface la ecuación (29), si $\underline{r}$ es raiz doble al menos de la ecuación característica (31).

Análogamente con las segundas derivadas,

$$\frac{d^2}{dr^2} P(D)e^{rx} = e^{rx}[x^2.P(r)+2x.P'(r) + P''(r)] = 0, \text{ si } \underline{r} \text{ es raiz triple al menos}$$

$$\frac{d^2}{dr^2} P(D)e^{rx} = P(D) \frac{d^2e^{rx}}{dr^2} = P(D)\ x^2.e^{rx} = 0, \text{ si r es raiz triple al menos}$$

luego si $\underline{r}$ es raiz triple al menos, las funciones $e^{rx}$, $xe^{rx}$ y $x^2.e^{rx}$ satisfacen la ecuación (29). En general vemos que se cumple que si es $r_i$ una raiz múltiple de orden k, son soluciones particulares de (29), las funciones

$$e^{r_ix},\ x.e^{r_ix},\ x^2.e^{r_ix}, \ldots, x^{k-1}.e^{r_ix}$$

Más general todavía, si la ecuación (31), tiene como raíces $r_1$, $r_2$, ..., $r_p$, con orden de multiplicidad $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_p$ respectivamente, la integral general de (29) será de la forma:

$$y = P_{\alpha_1-1}(x).e^{r_1x} + P_{\alpha_2-1}(x).e^{r_2x} + \ldots + P_{\alpha_p-1}(x).e^{r_px}$$

siendo $P_{k-1}(x)$ polinomios de coeficientes indeterminados y grados k-1 respectivamente. Se tendrá:

$$\alpha_1 + \alpha_2 + \ldots + \alpha_p = n$$

siendo $\underline{n}$ el grado de la ecuación característica (31).

Si la ecuación característica tiene las raíces múltiples complejas conjugadas $p\pm qj$ de multiplicidad $\alpha$, la ecuación (29) tendrá las siguientes $2\alpha$ soluciones reales correspondientes a estas raíces

$$\begin{cases} e^{px}.\cos qx,\ xe^{px}.\cos qx,\ x^2e^{px}.\cos qx, \ldots, x^{\alpha-1}.e^{px}.\cos qx \\ e^{px}.\operatorname{sen} qx,\ xe^{px}.\operatorname{sen} qx,\ x^2e^{px}.\operatorname{sen} qx, \ldots, x^{\alpha-1}.e^{px}.\operatorname{sen} qx \end{cases}$$

que se pueden agrupar en la solución general de (29), en la forma:

$$e^{px}.[P_{\alpha-1}(x).\cos qx + Q_{\alpha-1}(x).\operatorname{sen} qx]$$

6.1.- Ecuación completa de coeficientes constantes.-

Para resolver la ecuación completa

$$P(D)y = \varphi(x)$$

conociendo la solución general de la homogénea (29), se puede recurrir al método ya dado de variación de constantes, pero si el grado de la ecuación es alto, resulta bastante largo en la práctica.

Otro procedimiento que también vimos consistía en sumar a la solución general de (29) una solución particular de la completa (32). A este fin, vamos a indicar algunas reglas prácticas que ayuden a la determinación de soluciones particulares de (32), de acuerdo con la expresión del segundo miembro de (32), $\varphi(x)$.

a) $\varphi(x) = a.e^{\alpha x}$

En este caso, si $\alpha$ no es raiz de la ecuación característica, se pueden hallar soluciones particulares de la forma $\eta = k.e^{\alpha x}$.

Si $\alpha$ es raiz simple de (31), pruébese con $\eta = k.x\ e^{\alpha x}$.

Si $\alpha$ es raiz doble de (31), pruébese con $\eta = k.x^2.e^{\alpha x}$.

- - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - -

Si $\alpha$ es raiz de orden p de (31), pruébese con $\eta = k.x^p.e^{\alpha x}$.

b) $\varphi(x) = a.\cos\beta x + b.\operatorname{sen}\beta x$ (aunque a ó b sean nulos).

Si $\beta j$ no es raiz de (31), pruébese con $\eta = h.\cos\beta x + k.\operatorname{sen}\beta x$.

Si $\beta j$ es raiz simple de (31), pruébese con $\eta = hx\cos\beta x + kx\operatorname{sen}\beta x$.

Si $\beta j$ es raiz doble de (31), pruébese con $\eta = hx^2\cos\beta x + kx^2\operatorname{sen}\beta x$.

- - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - -

Si $\beta j$ es raiz de orden p de (31), pruébese con $\eta = h.x^p\cos\beta x + kx^p\operatorname{sen}\beta x$.

c) $\varphi(x) = C_0x^h + C_1.x^{h-1} + \ldots + C_{h-1}.x + C_h \equiv P_h(x)$

Si en la ecuación (29), $a_n \neq 0$, se puede probar con otro polinomio del mismo grado h con coeficientes indeterminados

$$\eta = Q_h(x) = b_0\ x^h + b_1\ x^{h-1} + \ldots + b_h$$

Si $a_n = a_{n-1} = 0$, pero $a_{n-2} \neq 0$, pruébese con: $\eta = x^2.Q_h(x) = b_0.x^{h+2} + \ldots + b_h.x^2$

Si $a_n = 0$, pero $a_{n-1} \neq 0$, pruébese con: $\eta = x.Q_h(x) = b_0.x^{h+1} + b_1.x^h + \ldots + b_h.x$

- - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - -

d) $\underline{\varphi(x) = P_h(x) . e^{rx}}$

Si $\underline{r}$ no es raiz de (31), pruébese con $\eta = Q_h(x) . e^{rx}$

Si $\underline{r}$ es raiz simple de (31), pruébese con $\eta = x . Q_h(x) . e^{rx}$

- - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - -

Si $\underline{r}$ es raiz de orden p de (31), pruébese con $\eta = x^p . Q_h(x) . e^{rx}$.

Este caso comprende los anteriores, ya que si $r = 0$, sale el caso (c); - si $P_h(x) \equiv 1$, se obtiene el caso (a); si $P_h(x) \equiv 1$ y $\underline{r}$ es imaginario sale el (b).

e) $\underline{\varphi(x) \equiv A(x) + B(x) + C(x)}$

Si el segundo miembro es suma de varias funciones, se hallan las soluciones particulares de cada una de las ecuaciones siguientes:

$$P(D)y = A(x) \implies y_1 = y_1(x)$$
$$P(D)y = B(x) \implies y_2 = y_2(x)$$
$$P(D)y = C(x) \implies y_3 = y_3(x)$$

La solución particular será $y_1 + y_2 + y_3$.

7.- Ecuación de Euler.-

Una de las pocas ecuaciones de coeficientes variables, que puede integrarse de modo elemental, transformándola en otra de coeficientes constantes, es la - de Euler que tiene la forma:

$$a_0(ax+b)^n . y^{(n} + a_1(ax+b)^{n-1} . y^{(n-1} + \ldots + a_{n-1}(ax+b) . y' + a_n y = \varphi(x) \qquad (33)$$

Efectuamos el cambio de variable independiente, definido por:

$$ax + b = e^t$$

$$x = \frac{e^t - b}{a}; \quad \frac{dx}{dt} = \frac{1}{a} . e^t$$

Las derivadas sucesivas se calcularán así:

$$y' = \frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}} = \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{1}{a} e^t} = a . \frac{dy}{dt} . e^{-t} \qquad (34)$$

Derivando respecto a $\underline{t}$ los dos miembros de (34) sale:

$$\frac{d^2y}{dx^2} \cdot \frac{dx}{dt} = a \cdot e^{-t}\left[\frac{d^2y}{dt^2} - \frac{dy}{dt}\right]$$

de donde

$$\frac{d^2y}{dx^2} = a^2 . e^{-2t}\left[\frac{d^2y}{dt^2} - \frac{dy}{dt}\right] \tag{35}$$

Volvemos a derivar respecto de $\underline{t}$ (35) y se obtiene:

$$\frac{d^3y}{dx^3} \cdot \frac{dx}{dt} = a^2 \cdot e^{-2t}\left[\frac{d^3y}{dt^3} - \frac{d^2y}{dt^2} - 2\frac{d^2y}{dt^2} + 2\frac{dy}{dt}\right]$$

$$\frac{d^3y}{dx^3} = a^3 \cdot e^{-3t}\left[\frac{d^3y}{dt^3} - 3\frac{d^2y}{dt^2} + 2\frac{dy}{dt}\right] \tag{36}$$

---

y así sucesivamente.

Sustituyendo en (33), x, y las sucesivas derivadas de y halladas en (34), (35), (36),..., se obtiene una ecuación de coeficientes constantes de la forma:

$$b_0 \cdot \frac{d^ny}{dt^n} + b_1 \cdot \frac{d^{n-1}y}{dt^{n-1}} + \ldots + b_{n-1} \cdot \frac{dy}{dt} + b_n . y = \Psi(t) \tag{37}$$

Integramos (37) y deshacemos el cambio, poniendo:

$$t = L(ax + b)$$

8.- Ejercicios

8.1.- Resolver la ecuación $xy'' + y' = x^2$.

Resolvamos primero la homogénea $xy'' + y' = 0$

$$x.\frac{dy'}{dx} = -y'; \quad \frac{dy'}{y'} = -\frac{dx}{x}$$

$$Ly' = -Lx + LC_1$$

$$y' = \frac{C_1}{x}$$

y la solución general de la homogénea será:

$$y = C_1.Lx + C_2$$

Aplicamos el método de variación de constantes para hallar la solución general de la completa; $C_1 = C_1(x)$, $C_2 = C_2(x)$.

$$y = C_1(x).Lx + C_2(x)$$

Derivando:

$$y' = \frac{C_1}{x}; \text{ hacemos } C_1'.Lx + C_2' = 0 \qquad (1)$$

$$y'' = -\frac{C_1}{x^2} + \frac{C_1'}{x}; \text{ sustituyendo en la completa sale}$$

$$C_1' \cdot \frac{1}{x} = x \qquad (2)$$

de (1) y (2), sale:

$$\begin{cases} C_1(x) = \dfrac{x^3}{3} + k_1 \\ C_2(x) = -\dfrac{x^3}{3}.Lx + \dfrac{x^3}{9} + k_2 \end{cases}$$

sustituyendo sale como solución general de la completa.

$$y = \frac{x^3}{9} + C_1.Lx + C_2$$

---

8.2.- Resolver $xy'' - y' + 4x^3y = 0$

Se obtienen las soluciones particulares:

$$\begin{cases} y_1 = \text{sen } x^2 \\ y_2 = \cos x^2 \end{cases}$$

luego la solución general será:

$$y = C_1 \text{ sen } x^2 + C_2 \cos x^2$$

---

8.3.- Resolver $y''' - 3y'' + 3y' - y = 0$

la ecuación característica es $r^3 - 3r^2 + 3r - 1 = 0$ y tiene de raíces $r = 1$ (triple), luego la solución general será:

$$y = C_1e^x + C_2x\, e^x + C_3x^2\, e^x$$

---

8.4.- Resolver: $y''' + 4y' = 0$

ecuación característica $r^3 + 4r = 0$, de raíces 0, $\pm 2j$, luego la solución general será:

$$y = C_1 + C_2 \cos 2x + C_3 \operatorname{sen} 2x$$

---

8.5.- Resolver: $y^{(Iv} + 5y'' - 36y = 0$

ecuación característica $r^4 + 5r^2 - 36 = 0$, de raíces $\pm 2$, $\pm 3j$, luego la solución general será:

$$y = C_1 . e^{2x} + C_2 . e^{-2x} + C_3 . \cos 3x + C_4 \operatorname{sen} 3x$$

---

8.6.- Resolver: $y''' + 3y'' - 4y = x . e^{-2x}$

ecuación característica $r^3 + 3r^2 - 4 = 0$ de raíces $\begin{cases} r = 1 \\ r = -2 \text{(doble)} \end{cases}$

La solución general de la incompleta será:

$$y = C_1 e^x + C_2 e^{-2x} + C_3 xe^{-2x}$$

Por ser -2 raiz doble de la ecuación característica, se puede buscar una solución particular de la forma:

$$\eta = (ax + b) . x^2 . e^{-2x}$$

Derivando é identificando, sale:

$$a = -\frac{1}{18}, \quad b = -\frac{1}{18}$$

y la solución general de la completa será:

$$y = C_1 e^x + C_2 e^{-2x} + C_3 x e^{-2x} - \frac{x^2}{18} (x + 1) . e^{-2x}$$

---

8.7.- Solución general de: $y'' + y = x . \operatorname{sen} x$.

La ecuación característica $r^2 + 1 = 0$, tiene de raíces $\pm j$.

La solución general de la homogénea será:

$$y = C_1 \cos x + C_2 \operatorname{sen} x$$

Busquemos una solución particular $\eta$ de la completa. Será de la forma:

$$\eta \equiv x\,[(ax + b).\cos x + (cx + d)\operatorname{sen} x\,]$$

Derivando, sustituyendo en la ecuación completa é identificando se obtiene:

$$a = -\frac{1}{4}, \quad b = c = 0, \quad d = \frac{1}{4}$$

$$\eta = -\frac{x^2}{4}.\cos x + \frac{x}{4}\operatorname{sen} x$$

y la solución general de la completa será:

$$y = C_1 \cos x + C_2 \operatorname{sen} x - \frac{x^2}{4} \cos x + \frac{x}{4} \operatorname{sen} x$$

---

8.8.- Resolver: $y''' + y' = \operatorname{tg} x \,.\, \sec x.$

La ecuación característica $r^3 + r = 0$, tiene de raíces

$$r = 0, \quad r = \pm j$$

La solución general de la homogénea es:

$$y = C_1 + C_2 \cos x + C_3 \operatorname{sen} x$$

Por variación de constantes, se obtiene como solución general de la ecuación completa:

$$y = C_1 + C_2 \cos x + C_3 \operatorname{sen} x + \sec x + \cos x.\, L \cos x - \operatorname{tg} x.\, \operatorname{sen} x + x.\, \operatorname{sen} x$$

---

8.9.- Resolver la ecuación: $x^2 y'' + xy' + y = 1$

Es de Euler; se hace el cambio:

$$x = e^t; \quad \frac{dy}{dx} = e^{-t}.\frac{dy}{dt}; \quad \frac{d^2y}{dx^2} = e^{-2t}\left(\frac{d^2y}{dt^2} - \frac{dy}{dt}\right)$$

Sustituyendo en la ecuación dada queda:

$$\frac{d^2y}{dt^2} + y = 1$$

cuya solución general conduce a:

$$y = C_1 \cos t + C_2 \operatorname{sen} t + 1$$

deshaciendo el cambio $t = Lx$

$$y = C_1 . \cos(Lx) + C_2 . \operatorname{sen}(Lx) + 1$$

# 11

# Soluciones de Ecuaciones Diferenciales Mediante Series

## LECCION 11

## SOLUCIONES DE ECUACIONES DIFERENCIALES MEDIANTE SERIES

### 1.- Resumen de conocimientos anteriores.-

Toda expresión de la forma:

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k \cdot (x - x_0)^k \tag{1}$$

donde $a_k$ y $x_0$ son constantes, se llama una serie de potencias en $x-x_0$, y se dice que es convergente en $x_1$ si la serie numérica obtenida de ella haciendo $x=x_1$ lo - es. Recordemos que toda serie de potencias en $x-x_0$, converge en todo un intervalo cerrado de la forma $|x-x_0|<R$, con $0 \leqslant R \leqslant \infty$. A R se le llama radio de convergencia de la serie (1). Toda serie de potencia con radio de convergencia R define una función f en el intervalo $|x-x_0|<R$ y se podrá escribir:

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k \cdot (x - x_0)^k \tag{2}$$

Una serie de potencias puede ser derivada término a término sin que por ello cambie su radio de convergencia; la suma de la serie obtenida derivando término a término los términos de una serie potencial tiene como suma la derivada de la suma de la serie original. O sea, si (1) tiene como suma f(x), se tiene:

$$f'(x) = \sum_{k=1}^{\infty} k \cdot a_k \cdot (x-x_0)^{k-1}$$

$$f''(x) = \sum_{k=2}^{\infty} k(k-1) \cdot a_k \cdot (x-x_0)^{k-2}$$

- - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - -

teniendo todas las series así obtenidas el mismo intervalo de convergencia de (1), o sea $|x-x_0| <R$.

Para calcular el intervalo y el radio de convergencia, se puede aplicar el criterio del cociente, de la siguiente forma:

$$\lim_{n\to\infty} \left| \frac{U_{n+1}}{U_n} \right| = \lim_{n\to\infty} \left| \frac{a_{n+1} \cdot (x-x_0)^{n+1}}{a_n \cdot (x-x_0)^n} \right| = \lim_{n\to\infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| \cdot |x-x_0| = L \cdot |x-x_0| < 1$$

de donde:

$$|x-x_0| < \frac{1}{L} = R$$

Si $R = 0$, sólo converge en el origen; si $R = \infty$ es convergente en todo el campo real. Recuérdese que lo que sucede en los extremos del intervalo de convergencia debe ser estudiado en cada caso particular por separado.

Toda función $f(x)$ que pueda representarse por una serie de potencias convergente de la forma (2), en un intervalo abierto I alrededor del punto $x_0$, es analítica en $x_0$. O sea $f(x)$ es analítica en $x_0$, si es desarrollable en serie de Taylor en un entorno de $x_0$. Así pues, una función analítica $f(x)$ es derivable, admitiendo derivadas de cualquier orden, en todos los puntos de I, pero además es analítica en todos los puntos de I. La mayoría de las funciones elementales, como polinomiales, exponenciales, trigonométricas, etc. son analíticas.

## 2.- Soluciones analíticas de ecuaciones diferenciales lineales.-

Las funciones analíticas aparecen en el estudio de las ecuaciones diferenciales por el hecho de que las soluciones de cualquier ecuación diferencial lineal normal cuyos coeficientes y segundo miembro son analíticos en un intervalo I, son también analíticas en I. Este resultado se conoce como el teorema de existencia para ecuaciones con coeficientes analíticos y, a diferencia de lo que sucede con la mayor parte de los teoremas de existencia sobre ecuaciones diferenciales, proporciona una técnica para el cálculo de soluciones. El "teorema de existencia para ecuaciones con coeficientes analíticos" dice así:

Consideremos la ecuación diferencial lineal de orden n cuyos coeficientes y segundos miembros son analíticos en el intervalo abierto I,

$$\frac{d^n y}{dx^n} + a_{n-1}(x).\frac{d^{n-1} y}{dx^{n-1}} + \dots + a_0(x).y = h(x) \tag{3}$$

Sea $x_0$ un punto arbitrario perteneciente a I, y supongamos que los desarrollos en serie de potencias de los coeficientes $a_0(x), \dots, a_{n-1}(x)$, $h(x)$, convergen todos en el intervalo $|x-x_0|<R$, $R>0$. En este caso, toda solución de (3) que esté definida en el punto $x_0$ es analítica en ese punto, y su desarrollo en serie de potencias alrededor de $x_0$ converge también en el intervalo $|x-x_0|<R$.

Obsérvese que este teorema no sólo afirma la analiticidad de las soluciones, sino también especifica un intervalo en el que convergen los desarrollos en serie de potencias de estas soluciones. Sin embargo, no se especifica el comportamiento de tales series fuera de este intervalo, pudiendo existir ecuaciones cuyas soluciones en serie convergen en un intervalo mayor que el cnnsiderado anteriormente.

Ejemplo. Hallar la solución general de:

$$y'' + x\,y' + y = 0 \tag{4}$$

en el intervalo $(-\infty, \infty)$.

Esta ecuación satisface la hipótesis del teorema anterior, por lo que cada una de sus soluciones tiene un desarrollo en serie de potencias alrededor de $x_0 = 0$, convergente para todos los valores de x. Para hallar las soluciones, utilizaremos el método de los coeficientes indeterminados como sigue.

Sea y(x) una solución particular de (4). Expresemos esta función mediante la serie:

$$y(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k \, . \, x^k \tag{5}$$

y derivando:

$$y'(x) = \sum_{k=1}^{\infty} k.a_k.x^{k-1}$$

$$y''(x) = \sum_{k=2}^{\infty} k(k-1).a_k.x^{k-2}$$

Sustituyendo estas series en (4) queda:

$$\sum_{k=2}^{\infty} k.(k-1).a_k.x^{k-2} + \sum_{k=1}^{\infty} k.a_k x^k + \sum_{k=0}^{\infty} a_k.x^k = 0 \tag{6}$$

Identificando coeficientes queda:

$$\left\{\begin{array}{c} a_0 + 2a_2 = 0 \\ (k+2).a_{k+2} + a_k = 0, \; k \geqslant 1 \end{array}\right\}$$

Para k par, se obtiene

$a_0 = a_0$
$a_2 = -a_0/2$
$a_4 = a_0/4.2$
$a_6 = - a_0/6.4.2$
- - - - - - - - - - - -

$$a_{2k} = (-1)^k . \frac{a_0}{(2k)(2k-2)\ldots 4.2}$$

Para k impar

$a_1 = a_1$
$a_3 = - a_1/3$
$a_5 = a_1/5.3$
$a_7 = - a_1/7.5.3$
- - - - - - - - - - - -

$$a_{2k+1} = (-1)^k . \frac{a_1}{(2k+1)(2k-1)\ldots 5.3}$$

Sustituyendo en (5), se obtiene:

$$y(x) = a_0 [1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{4.2} - \ldots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)\ (2n-2)\ldots 4.2} + \ldots ] +$$

$$+ a_1 [x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5.3} + \ldots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)(2n-1)\ldots 5.3} + \ldots ] \quad (7)$$

Debemos de mostrar que (7) es la solución general de (4), en $(-\infty, \infty)$. Para ello escribimos (7) de la forma:

$$y(x) = a_0 . y_0(x) + a_1 . y_1(x) \quad (8)$$

siendo:

$$\left\{ \begin{array}{l} y_0(x) = 1 + \sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^n . \dfrac{x^{2n}}{(2n).(2n-2)\ldots 4.2} \\ y_1(x) = x + \sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^n \dfrac{x^{2n+1}}{(2n+1).(2n-1)\ldots 5.3} \end{array} \right\} \quad (9)$$

Por el criterio del cociente, se puede comprobar que el radio de convergencia de $y_0(x)$ é $y_1(x)$ es $R = \infty$; luego la (8) tendrá también de radio de convergencia $R = \infty$. Además, como $y_0$ e $y_1$ son cada una de ellas solución de (4), y

$$y_0(0) = 1 \qquad y'_0(0) = 0$$

$$y_1(0) = 0 \qquad y'_1(0) = 1$$

$y_0$ e $y_1$ son linealmente independientes en $(-\infty, \infty)$ y por lo tanto (8) es la solución general de (4).

3.- Ecuación de Legendre.-

Se llama así a la ecuación:

$$(1 - x^2)y'' - 2xy' + \lambda(\lambda+1)y = 0 \quad (10)$$

donde $\lambda$ es una constante no negativa, y que aparece en la solución de numerosos problemas físico-matemáticos. Buscamos una solución de la forma:

$$y(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k . x^k \quad (11)$$

Como el coeficiente de $y''$ se anula para $x = \pm 1$, el teorema de existencia para ecuaciones con coeficientes analíticos sólo garantiza que la serie (11) convergerá en el intervalo (-1,1).

Sustituyendo (11) y sus dos primeras derivadas en (10) quedará:

$$(1-x^2).\sum_{k=2}^{\infty} k(k-1).a_k.x^{k-2} - 2x\sum_{k=1}^{\infty} ka_k.x^{k-1} + \lambda(\lambda+1).\sum_{k=0}^{\infty} a_k.x^k = 0$$

Igualando a cero los sucesivos coeficientes se obtiene:

$$\begin{cases} 2a_2 + \lambda(\lambda+1)a_0 = 0 \\ (\lambda+2)(\lambda-1)a_1 + (3.2).a_3 = 0 \\ (k+2)(k+1).a_{k+2} + (\lambda+k+1).(\lambda-k).a_k = 0, \quad k \geq 2 \end{cases}$$

y podemos obtener todos los términos en función de $a_0$ y $a_1$.

$$a_2 = -\frac{(\lambda+1)\lambda}{2}\, a_0$$

$$a_4 = -\frac{(\lambda+3)(\lambda-2)}{4.3}\,.\, a_2 = \frac{(\lambda+3)(\lambda+1)\lambda(\lambda-2)}{4!}\, a_0$$

- - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - -

$$a_{2k} = (-1)^k.\frac{(\lambda+2k-1)(\lambda+2k-3)\ldots(\lambda+1)\lambda(\lambda-2)\ldots(\lambda-2k+2)}{(2k)!}\, a_0$$

y los términos impares salen

$$a_3 = -\frac{(\lambda+2)(\lambda-1)}{3!}\, a_1$$

$$a_5 = -\frac{(\lambda+4)(\lambda-3)}{5.4}.a_3 = \frac{(\lambda+4).(\lambda+2)\lambda(\lambda-1)(\lambda-3)}{5!}.a_1$$

- - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - -

$$a_{2k+1} = (-1)^k.\frac{(\lambda+2k)(\lambda+2k-2)\ldots(\lambda+2)(\lambda-1)\ldots(\lambda-2k+1)}{(2k+1)!}.a_1$$

La solución (11), se puede poner así:

$$y(x) = a_0.y_0(x) + a_1.y_1(x) \tag{12}$$

siendo $a_0$ y $a_1$ constantes arbitrarias y

$$\left.\begin{aligned} y_0(x) &= 1 - \frac{(\lambda+1)\lambda}{2!}x^2 + \frac{(\lambda+3)(\lambda+1)\lambda(\lambda-2)}{4!}x^4 - \ldots \\ y_1(x) &= x - \frac{(\lambda+2)(\lambda-1)}{3!}x^3 + \frac{(\lambda+4)(\lambda+2)(\lambda-1)(\lambda-3)}{5!}x^5 - \ldots \end{aligned}\right\} \tag{13}$$

y como:

$$\begin{cases} y_0(0) = 1 & y'_0(0) = 0 \\ y_1(0) = 0 & y'_1(0) = 1 \end{cases}$$

la expresión (12) es pues la solución general de la ecuación de Legendre de orden $\lambda$, (10), en el intervalo $(-1,1)$.

Cuando $\lambda$ es un número entero, no negativo, son de gran interés las soluciones de la ecuación de Legendre; cuando $\lambda = 2n$, $n = 0, 1, 2, \ldots$, la serie $y_0$ se convierte en un polinomio de grado $2n$ con potencias pares de $x$; cuando $\lambda = 2n+1$, $n = 0, 1, 2, \ldots, n$, la serie $y_1$ es un polinomio de grado $2n+1$ con potencias impares de $x$. Por lo tanto la ecuación de Legendre tiene soluciones polinomiales para todo valor entero no negativo del parámetro $\lambda$, que son los ya definidos polinomios de Legendre.

## 4.- Ecuación de Hermite.-

Se llama así a la ecuación:

$$y'' - 2xy' + 2\lambda y = 0 \tag{14}$$

Si buscamos una solución de la forma:

$$y(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k . x^k \tag{15}$$

derivando dos veces (15) y sustituyendo en (14), se obtiene:

$$\sum_{k=2}^{\infty} k.(k-1).a_k.x^{k-2} - 2x \sum_{k=1}^{\infty} ka_k.x^{k-1} + 2\lambda \sum_{k=0}^{\infty} a_k.x^k = 0$$

identificando los coeficientes queda:

$$y(x) = a_0 \left[1 - \frac{2\lambda}{2!} x^2 + \frac{2^2.\lambda(\lambda-2)}{4!} x^4 - \frac{2^3.\lambda(\lambda-2)(\lambda-4)}{6!} x^6 + \ldots\right] +$$

$$+ a_1 \left[x - \frac{2(\lambda-1)}{3!} x^3 + \frac{2^2.(\lambda-1)(\lambda-3)}{5!} x^5 - \frac{2^3.(\lambda-1)(\lambda-3)(\lambda-5)}{7!} x^7 + \ldots\right]$$

o sea

$$y(x) = a_0 . y_0(x) + a_1 \; y_1(x)$$

siendo $a_0$ y $a_1$ dos constantes arbitrarias.

Si $\lambda$ es un entero par, $\lambda = 2p$, la serie $y_0(x)$ se convierte en un polinomio de grado $\lambda$; si $\lambda$ es un entero impar, $\lambda = 2p+1$, la serie $y_1(x)$ se convierte en un polinomio de grado $\lambda$. Para los valores particulares:

$$a_0 = (-1)^p \cdot \frac{(2p)!}{p!} \qquad\qquad a_1 = (-1)^p \cdot \frac{2.(2p)!}{p!}$$

los polinomios obtenidos se llaman polinomios de Hermite.

5.- Puntos singulares.-

Consideremos la ecuación diferencial lineal homogénea de segundo orden

$$p(x) \cdot y'' + q(x) \cdot y' + r(x) \cdot y = 0 \tag{16}$$

en la que sus coeficientes son analíticos en cierto intervalo abierto I. Supongamos que existe un valor $x_0$ de I tal que $p(x_0) = 0$ al que llamaremos punto singular de la ecuación (16). Por la analiticidad expuesta de los coeficientes de (16), la función $p(x)$ tiene un desarrollo en serie de potencias, válido en cierto intervalo alrededor de $x_0$

$$p(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k \cdot (x - x_0)^k$$

y como $p(x_0) = 0$, existe un entero positivo m tal que

$$p(x) = \sum_{k=m}^{\infty} a_k \cdot (x-x_0)^k = (x-x_0)^m \cdot \sum_{k=m}^{\infty} a_k \cdot (x-x_0)^{k-m} = (x-x_0)^m \cdot p_1(x)$$

donde $p_1(x)$ es analítico en $x_0$ y $p_1(x_0) \neq 0$. Dividiendo (16) por $p_1(x)$ queda de la forma

$$(x-x_0)^m \cdot y'' + q_1(x) \cdot y' + r_1(x) \cdot y = 0 \tag{17}$$

siendo sus coeficientes $q_1 = \frac{q}{p_1}$, $r_1 = \frac{r}{p_1}$, analíticos en $x_0$, y cumpliéndose que la ecuación (17) es equivalente a la (16) en un intervalo alrededor de ese punto.

El comportamiento de las soluciones de (17) en un entorno de $x_0$, depende del exponente m y del valor de $q_1$ en $x_0$, siendo conveniente clasificar los puntos singulares en regulares e irregulares del siguiente modo:

Decimos que un punto $x_0$ es un punto singular regular de la ecuación diferencial lineal homogénea de segundo orden

$$p(x) \cdot y'' + q(x) \cdot y' + r(x) \cdot y = 0 \tag{16}$$

si es un punto singular y si las funciones

$$p_1(x) = \frac{q(x)}{p(x)} \qquad y \qquad q_1(x) = \frac{r(x)}{p(x)}$$

tienen la propiedad de que $(x-x_0).p_1(x)$ y $(x-x_0)^2.q_1(x)$ son a la vez analíticas en $x_0$.

O sea la ecuación (16) se puede escribir de la forma:

$$(x-x_0)^2.y'' + (x-x_0).q_2(x).y' + r_2(x).y = 0 \tag{18}$$

siendo $q_2$ y $r_2$ analíticas en $x_0$.

Si un punto singular no es regular, diremos que es un punto singular irregular. Todos los puntos no singulares de la ecuación (16), en la que sus coeficientes son analíticos en $x_0$, se llaman puntos regulares.

Así, la ecuación

$$x^2(x+1)^3.(x-1).y'' + xy' - 2y = 0$$

se puede escribir de las formas

$$x^2y'' + \frac{x}{(x+1)^3.(x-1)}\, y' - \frac{2}{(x+1)^3(x-1)}\, y = 0$$

y

$$(x-1)^2.y'' + \frac{x-1}{x(x+1)^3}\, y' - \frac{2(x-1)}{x^2(x+1)^3}\, y = 0$$

por lo que los puntos singulares $x = 0$ y $x = 1$ son puntos singulares regulares. En cambio $x = -1$ es un punto singular irregular ya que si la escribimos así:

$$(x+1)^2.y'' + \frac{x+1}{x(x+1)^2.(x-1)}.y' - \frac{2}{x^2(x+1)(x-1)}\, y = 0$$

Los coeficientes de y é y' no están definidos en $x = -1$.

En general, los puntos singulares regulares son relativamente fáciles de manejar; se puede utilizar el método de los coeficientes indeterminados con algunas modificaciones (por ejemplo ensayar soluciones de la forma:
$y(x) = (x-x_0)^U . \sum_{k=0}^{\infty} a_k(x-x_0)^k$, "Método de Frobenius").

En cambio, en los puntos singulares irregulares la situación es mucho más complicada, pudiendo haber ecuacinnes que no tienen soluciones en serie alrededor de dicho punto.

Por simplicidad, limitaremos el estudio a singularidades en el origen, en cuyo caso la (18) queda de la forma:

$$x^2 y'' + x.q_2(x).y' + r_2(x).y = 0$$

lo que no quita ninguna generalidad, ya que el cambio de variables $x-x_0 = t$, lleva una singularidad de $x_0$ a 0.

6.- Solución alrededor de un punto singular.-

Dada la ecuación diferencial

$$x^2 y'' + x.q(x).y' + r(x).y = 0 \tag{19}$$

cuyos coeficientes $q(x)$ y $r(x)$ son funciones analíticas en $x = 0$, vamos a indicar el procedimiento para encontrar al menos una solución de ella.

Supongamos $x > 0$, y busquemos una solución de la forma:

$$y(x) = x^U . \sum_{k=0}^{\infty} a_k . x^k \tag{20}$$

siendo $a_0 \neq 0$. Derivando dos veces (20):

$$y'(x) = x^U . \sum_{k=0}^{\infty} (k+U).a_k.x^{k-1}$$

$$y''(x) = x^U . \sum_{k=0}^{\infty} (k+U).(k+U-1).a_k.x^{k-2}$$

sustituyendo $y(x)$ y sus derivadas en (19) queda:

$$\sum_{k=0}^{\infty} (k+U).(k+U-1).a_k.x^k + q(x). \sum_{k=0}^{\infty} (k+U).a_k.x^k + r(x) . \sum_{k=0}^{\infty} a_k . x^k = 0 \tag{21}$$

y como por hipótesis $q(x)$ y $r(x)$ son analíticas en $x = 0$, se podrán expresar de la siguiente forma:

$$q(x) = \sum_{k=0}^{\infty} q_k.x^k \qquad r(x) = \sum_{k=0}^{\infty} r_k.x^k \tag{22}$$

siendo ambas series convergentes en un intervalo $|x| < R$.

Sustituyendo (22) en (21) se obtiene:

$$\sum_{k=0}^{\infty} (k+U).(k+U-1).a_k.x^k + \left(\sum_{k=0}^{\infty}(k+U).a_k.x^k\right)\left(\sum_{k=0}^{\infty} q_k.x^k\right)+\left(\sum_{k=0}^{\infty} a_k.x^k\right).\left(\sum_{k=0}^{\infty} r_k.x^k\right) = 0 \tag{23}$$

pero como en general:

$$\left\{\begin{array}{l} \left(\sum_{k=0}^{\infty} a_k . x^k\right) . \left(\sum_{k=0}^{\infty} b_k . x^k\right) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k . x^k \\ \\ \text{siendo } c_k = \sum_{j=0}^{k} a_j . b_{k-j} \end{array}\right.$$

la expresión (23) se podrá escribir así:

$$\sum_{k=0}^{\infty} \left[(k+U).(k+U-1).a_k + \sum_{j=0}^{k} (j+U).a_j.q_{k-j} + \sum_{j=0}^{k} a_j.r_{k-j}\right] x^k = 0$$

luego se debe cumplir para todo $k > 0$

$$(k+U).(k+U-1).a_k + \sum_{j=0}^{k} \left[(j+U).q_{k-j} + r_{k-j}\right] a_j = 0 \tag{24}$$

para $k = 0$, se obtiene:

$$U(U-1) + q_0 U + r_0 = 0 \tag{25}$$

cuando $k \geqslant 1$, la (24) se transforma en:

$$\left[(k+U)(k+U-1)+q_0(k+U)+r_0\right] a_k + \sum_{j=0}^{k=1} \left[(j+U)q_{k-j} + r_{k-j}\right] a_j = 0 \tag{26}$$

A la ecuación (25), se le llama <u>ecuación indicial</u> asociada con (19), siendo una ecuación de segundo grado en U cuyas raíces son los valores posibles de U en (20) y se llaman los exponentes característicos de esa ecuación.

Llamemos I(U) al primer miembro de la ecuación (25)

$$I(U) = U(U-1) + q_0 . U + r_0$$

sean $U_1$ y $U_2$ las raíces de la ecuación (25), $I(U) = 0$, siendo $R_e(U_1) \geqslant R_e(U_2)$; ($R_e$= parte real de)

Cuando $U = U_1$, la (26) queda así:

$$I(k+U_1)a_k + \sum_{j=0}^{k=1} \left[(j+U_1)q_{k-j} + r_{k-j}\right] a_j = 0 \tag{27}$$

y tal como se escogió $U_1$, sabemos que $I(k+U_1) \neq 0$, para $k = 1, 2, \ldots$

De la ecuación (27) podemos obtener la ley de recurrencia

$$a_k = - \frac{1}{I(k+U_1)} \sum_{j=0}^{k=1} [(j+U_1).q_{k-j} + r_{k-j}].a_j, \quad k > 1 \tag{28}$$

De (28) podemos hallar todos los $a_k$, desde $k = 1$, y sustituyendo en (20), obtener una solución de la ecuación (19), válida en el intervalo $0 < x < R$.

Si en todos los cálculos se sustituye $x^U$ por $|x|^U$, el resultado anterior es válido también en el intervalo $-R < x < 0$. La serie obtenida converge siempre en $0 < |x| < R$. Luego la función

$$y(x) = |x|^{U_1} . \sum_{k=0}^{\infty} a_k . x^k \tag{29}$$

siendo $a_0$ arbitrario y estando dados los $a_k$ por la expresión (28), es una solución de la ecuación (19), cuando $0 < |x| < R$.

Debemos hallar ahora una segunda solución de (19), linealmente independiente con la (29), lo que será sencilla de realizar si $U_1 \neq U_2$; a este fin sustituimos en la ecuación (27) $U_1$ por $U_2$ y obtenemos la siguiente expresión para determinar $a_k$.

$$I(k+U_2)a_k + \sum_{j=0}^{k=1} [(j+U_2).q_{k-j} + r_{k-j}].a_j = 0 \tag{30}$$

De (30) obtenemos pues $a_k$, si se cumple que:

$$I(k+U_2) \neq 0, \text{ para todo } k > 1$$

Pero cuando $k > 0$, se cumple que:

$$I(k+U_2) = 0$$

si $k+U_2 = U_1$; ó sea $U_1 - U_2 = k$.

Obtenemos como segunda solución de (19)

$$y(x) = |x|^{U_2} . \sum_{k=0}^{\infty} a_k . x^k, \quad a_0 \neq 0 \tag{31}$$

válida para $0 < |x| < R$, siempre que se cumpla que las raíces de la ecuación indicial, $I(U) = 0$, no difieran en un entero.

La solución general de (19) será:

$$y(x) = c_1 . y_1(x) + c_2 . y_2(x)$$

siendo $y_1$ é $y_2$ las soluciones particulares obtenidas de (29) y (31) haciendo $a_0 = 1$.

7.- Resumen y casos particulares.-

El siguiente teorema resume todo lo dicho anteriormente, é incluye el estudio de los casos particulares no considerados. Dice así.

Consideremos la ecuación diferencial lineal homogénea de segundo orden - con coeficientes analíticos en el intervalo $|x| < R$

$$x^2 y'' + x.q(x).y + r(x).y = 0 \tag{32}$$

y la ecuación indicial de raíces $U_1$ y $U_2$, $(R_e(U_1) \geqslant R_e(U_2))$,

$$U(U-1) + q(0).U + r(0) = 0 \tag{33}$$

La ecuación (32) tiene dos soluciones linealmente independientes $y_1$ e $y_2$, válidas para $0 < |x| < R$, cuya expresión es la siguiente:

a) Si $U_1 - U_2$ no es un número entero. Las soluciones $y_1$ é $y_2$ son las - calculadas anteriormente

$$y_1(x) = |x|^{U_1} . \sum_{k=0}^{\infty} a_k . x^k, \quad a_0 = 1$$

$$y_2(x) = |x|^{U_2} . \sum_{k=0}^{\infty} b_k . x^k, \quad b_0 = 1$$

b) Si $U_1 = U_2 = U$. Las soluciones $y_1(x)$ é $y_2(x)$ son las siguientes:

$$y_1(x) = |x|^{U} . \sum_{k=0}^{\infty} a_k . x^k, \quad a_0 = 1$$

$$y_2(x) = |x|^{U} . \sum_{k=0}^{\infty} b_k . x^k + y_1(x) . L|x|$$

c) Si $U_1 - U_2$ es un número entero y positivo. Las soluciones se pueden expresar del siguiente modo

$$y_1(x) = |x|^{U_1} . \sum_{k=0}^{\infty} a_k . x^k, \quad a_0 = 1$$

$$y_2(x) = |x|^{U_2} . \sum_{k=0}^{\infty} b_k . x^k + c . y_1(x) . L|x|, \quad b_0 = 1, \quad c = \text{constante fija.}$$

Los valores de las constantes que aparecen en cada una de las soluciones se pueden determinar directamente de la ecuación diferencial (32) por el método de los coeficientes indeterminados.

Veamos a continuación los razonamientos que nos conducen en el caso b a la solución con un término logarítmico. En el caso c se podrían hacer consideraciones similares.

Consideremos la solución particular $y_1(x)$ de (32), considerando que U es otra variable, se tendrá pues que

$$y(x, U) = x^U . \sum_{k=0}^{\infty} a_k . x^k, \quad a_0 = 1 \tag{34}$$

debe verificar la ecuación (32), en el intervalo $0 < x < R$. Llamemos L al operador diferencial

$$L = x^2 . D^2 + x . q(x) . D + r(x)$$

con lo que la ecuación (32) se escribirá de la forma:

$$Ly = 0 \tag{35}$$

Sustituyendo (34) en (35), quedará:

$$Ly(x, U) = I(U) . x^U + x^U . \sum_{k=1}^{\infty} \left\{ I(k+U) . a_k + \sum_{j=0}^{k-1} [(j+U) . q_{k-j} + r_{k-j}] . a_j \right\} x^k \tag{36}$$

siendo $q_{k-j}$ y $r_{k-j}$ los coeficientes del desarrollo en serie de potencias de q y r alrededor del origen. Se tiene:

$$I(k+U) . a_k + \sum_{j=0}^{k-1} [(j+U) . q_{k-j} + r_{k-j}] . a_j = 0$$

y se determinan $a_1, a_2, \ldots,$ en función de U, por lo que podemos denominarlos de la forma $a_k(U)$; sustituyendo en (34) se obtiene

$$y_1(x, U) = x^U [1 + \sum_{k=1}^{\infty} a_k(U) . x^k ] \tag{37}$$

cumpliéndose que:

$$L \; y_1(x, U) = I(U) . x^U \tag{38}$$

Pero como $U_1$ es una raiz doble de la ecuación $I(U) = 0$, se tendrá:

$$I(U) = (U - U_1)^2$$

y la ecuación (38) la escribiremos

$$L\ y_1(x,U) = (U-U_1)^2 . x^U \tag{39}$$

y se tiene que $L\ y_1(x,U) = 0$ cuando $U = U_1$; luego la función $y_1(x,U_1)$ es una solución de la ecuación $Ly = 0$, como ya sabíamos.

Si diferenciamos respecto a $U$, su segundo miembro se sigue anulando para $U = U_1$

$$\frac{\partial}{\partial U}(U-U_1)^2 . x^U = x^U . (U-U_1) . [2 + (U-U_1) . Lx]$$

y teniendo en cuenta la permutabilidad de las derivadas

$$\frac{\partial}{\partial U}[L\ y_1(x,U)] = L[\frac{\partial}{\partial U}\ y_1(x,U)]$$

se tiene que:

$$L[\frac{\partial}{\partial U}\ y_1(x,U)] = 0$$

cuando $U = U_1$. Luego si se deriva (37) respecto de $U$ y hacemos $U = U_1$, se obtendrá una expresión que llamaremos $y_2(x)$ y satisfará la ecuación $Ly = 0$

$$y_2(x,U_1) = \frac{\partial}{\partial U}\ y_1(x,U)\Big]_{U=U_1} = x^{U_1} . \sum_{k=1}^{\infty} a'_k(U_1) . x^k + y_1(x,U_1) . Lx \ .$$

Tal como habíamos escrito en el caso b anteriormente considerado.

## 8.- Ecuación de Bessel.-

Aunque las primeras ecuaciones diferenciales de este tipo fueron ya tratadas por Daniel Bernouilli en 1732 al estudiar las oscilaciones de una cadena colgada por un extremo, a otros grandes fisicomatemáticos como Euler, Lagrange, Fourier y Poisson se les presentaron estas ecuaciones posteriormente al tratar de resolver algunos de los múltiples problemas que trataron. En el año 1.824 el astrónomo alemán Bessel hizo un estudio sistemático de tales ecuaciones en relación con un problema de astronomía dinámica, dando su nombre a la ecuación y a las funciones que se obtienen a partir de ella. Actualmente es una de las ecuaciones diferenciales más importantes de la física matemática. La expresión de la ecuación de Bessel de orden $\alpha$ es la siguiente:

$$x^2 . y'' + xy' + (x^2 - \alpha^2)y = 0 \tag{40}$$

o bien:

$$y'' + \frac{1}{x} . y' + (1 - \frac{\alpha^2}{x^2}) . y = 0 \tag{41}$$

Comparada con la ecuación ya estudiada (32), $q(x) = 1$, $r(x) = x^2 - \alpha^2$, - $q_0 = q(0) = 1$, $r_0 = r(0) = -\alpha^2$, y la ecuación indicial

$$U(U-1) + q_0.U + r_0 = 0$$

se convierte en nuestro caso en

$$U(U-1) + U - \alpha^2 = 0$$

$$U^2 - \alpha^2 = 0 \tag{42}$$

Las raíces de la ecuación indicial serán $\pm\alpha$. Una solución, tal como hemos demostrado anteriormente, válida para todo valor de x, será de la forma:

$$y_1(x) = x^\alpha . \sum_{k=0}^{\infty} a_k.x^k, \quad p \geqslant 0 \tag{43}$$

Los coeficientes de (40), sustituyendo y por $y_1(x)$ de (43), serán:

$$(x^2 - \alpha^2).y_1(x) = x^\alpha . \sum_{k=2}^{\infty} a_{k-2}.x^k - x^\alpha . \sum_{k=0}^{\infty} \alpha^2.a_k.x^k$$

$$x.y_1'(x) = x^\alpha . \sum_{k=0}^{\infty} (k+\alpha).a_k.x^k$$

$$x^2.y_1''(x) = x^\alpha . \sum_{k=0}^{\infty} (k+\alpha).(k+\alpha-1).a_k.x^k$$

sumando e igualando a cero, queda:

$$\sum_{k=0}^{\infty} [(k+\alpha).(k+\alpha-1) + (k+\alpha) - \alpha^2].a_k.x^k + \sum_{k=2}^{\infty} a_{k-2}\, x^k = 0$$

o bien

$$(2\alpha+1)a_1 x + \sum_{k=2}^{\infty} [k(2\alpha+k)a_k + a_{k-2}]x^k \equiv 0$$

por lo que se obtiene:

$$a_1 = 0, \quad a_k = -\frac{a_{k-2}}{k(2\alpha+k)}, \quad k \geqslant 2 \tag{44}$$

De (44) se obtiene:

$$a_1 = a_3 = a_5 = \ldots = 0$$

$$a_2 = -\frac{a_0}{2(2\alpha+2)}$$

$$a_4 = \frac{a_0}{2.4.(2\alpha+2)(2\alpha+4)}$$

$$- - - - - - - - - - - - - - - - - -$$

$$a_{2k} = (-1)^k \frac{a_0}{2.4.6\ldots(2k)(2\alpha+2)(2\alpha+4)\ldots(2\alpha+2k)} =$$

$$= (-1)^k \frac{a_0}{2^{2k}.k!(\alpha+1)(\alpha+2)\ldots(\alpha+k)}$$

y se obtiene la solución particular:

$$y_1(x) = a_0 . \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{2^{2k}.k!(\alpha+1)(\alpha+2)\ldots(\alpha+k)} . x^{2k+\alpha} \tag{45}$$

siendo $a_0 \neq 0$ una constante arbitraria.

Si hacemos $a_0 = \dfrac{1}{2^{\alpha}.\Gamma(\alpha+1)}$, siendo $\Gamma$ la función gamma, se obtiene -- "la función de Bessel de orden $\alpha$ de primera clase", que se representa por $J_\alpha$ y tiene por expresión:

$$J_\alpha(x) = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{x^{2k+\alpha}}{2^{2k+\alpha}.k!(\alpha+1)(\alpha+2)\ldots(\alpha+k).\Gamma(\alpha+1)}$$

o bien:

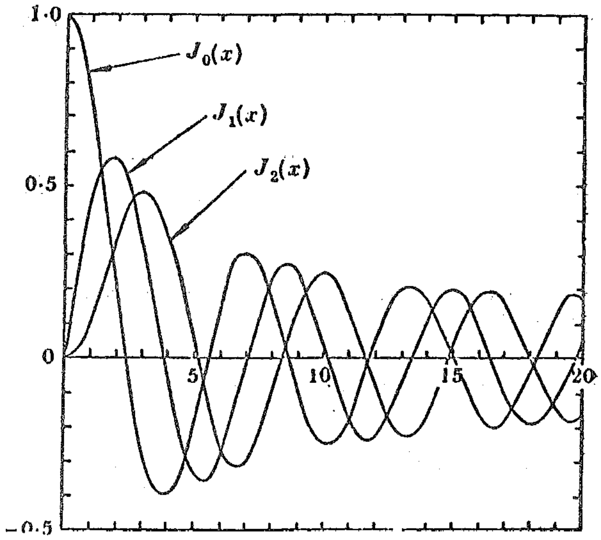
$$J_\alpha(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{\Gamma(k+1).\Gamma(\alpha+k+1)} . \left(\frac{x}{2}\right)^{2k+\alpha} \tag{46}$$

si $\alpha$ es un número entero no negativo $\underline{n}$,

$$J_n(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k!(n+k)!} . \left(\frac{x}{2}\right)^{2k+n} \tag{47}$$

La variación de las funciones de Bessel $J_0(x)$, $J_1(x)$, $J_2(x)$ para $0 \leqslant x \leqslant 20$ aparece en la figura. Son las funciones de Bessel que aparecen con mayor frecuencia en los problemas físicos y su comportamiento es similar al de la función general $J_n(x)$.

Para hallar la solución general de la ecuación de Bessel, es preciso encontrar una segunda solución linealmente independiente de $J_\alpha(x)$. Para ello apliquemos las consecuencias estudiadas en el número anterior. Se pueden presentar los tres casos siguientes:




Primer caso $\alpha > 0$ y $2\alpha$ no es entero. (La diferencia de las raíces de la ecuación indicial (42) será un entero, si $\alpha$ es un entero ó la mitad de un entero).

En este caso las raíces de la ecuación indicial no difieren en un entero, por lo que podemos obtener una segunda solución particular poniendo $-\alpha$ en vez de $\alpha$, obteniendo la función de Bessel $J_{-\alpha}(x)$

$$J_{-\alpha}(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{\Gamma(k+1)\cdot\Gamma(k-\alpha+1)} \cdot \left(\frac{x}{2}\right)^{2k-\alpha} \tag{48}$$

para $x > 0$. (Si es $x < 0$, se debe sustituir $x^{-\alpha}$ por $|x|^{-\alpha}$). La función (48) está definida aún cuando $\alpha = n + \frac{1}{2}$, siendo n entero, dando también una solución que es linealmente independiente con $J_\alpha(x)$. Por lo tanto, siempre que $\alpha$ no sea un entero, la solución general de la ecuación de Bessel de orden $\alpha$, (40), es

$$y(x) = c_1 . J_\alpha(x) + c_2 . J_{-\alpha}(x) \tag{49}$$

Segundo caso. $\alpha = 0$.

La ecuación de Bessel (40) es:

$$xy'' + y' + xy = 0 \tag{50}$$

la ecuación indicial tiene como raíces $U_1 = U_2 = 0$. De acuerdo con el teorema demostrado en el número anterior, podemos encontrar una segunda solución particular $K_0(x)$ de la forma:

$$K_0(x) = \sum_{k=1}^{\infty} b_k . x^k + J_0(x) . Lx \tag{51}$$

Los coeficientes de (50), al sustituir y por $K_0(x)$ serán:

$$xK_0(x) = \sum_{k=3}^{\infty} b_{k-2}.x^{k-1} + x.J_0(x).Lx$$

$$K_0'(x) = \sum_{k=1}^{\infty} k.b_k.x^{k-1} + J_0'(x).Lx + \frac{J_0(x)}{x}$$

$$x.K_0''(x) = \sum_{k=1}^{\infty} k(k-1)b_k.x^{k-1} + x.J_0''(x).Lx+ 2J_0'(x) - \frac{J_0(x)}{x}$$

sumando é igualando a cero se obtiene la identidad

$$b_1 + 4b_2x + \sum_{k=3}^{\infty} [k^2.b_k + b_{k-2}].x^{k-1} + [x.J_0''(x) + J_0'(x) + x.J_0(x)].Lx + 2J_0'(x) \equiv 0 \tag{52}$$

pero como $xJ_0''(x) + J_0'(x) + x.J_0(x) \equiv 0$ por ser $J_0(x)$ solución particular de (50), la (52) queda así:

$$b_1 + 4b_2x + \sum_{k=3}^{\infty} [k^2.b_k + b_{k-2}].x^{k-1} \equiv -2J_0'(x) \tag{53}$$

Derivando $J_0(x)$, se tiene:

$$J_0'(x) = \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k.\frac{2k}{2^{2k}(k!)^2}.x^{2k-1}$$

y sustituyendo en (53) queda:

$$b_1 + 4b_2x + \sum_{k=3}^{\infty} [k^2.b_k + b_{k-2}]x^{k-1} \equiv \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k+1} \frac{4k}{2^{2k}.(k!)^2}.x^{2k-1}$$

multiplicando por x y separando los términos pares e impares obtenemos

$$b_1.x+ \sum_{k=1}^{\infty} [(2k+1)^2.b_{2k+1}+b_{2k-1}].x^{2k+1}+4b_2.x^2+ \sum_{k=2}^{\infty} [(2k)^2.b_{2k}+b_{2k-2}].x^{2k} \equiv x^2 +$$

$$+ \sum_{k=2}^{\infty} (-1)^{k+1}.\frac{4k}{2^{2k}(k!)^2}.x^{2k}$$

luego:

$$b_1 = b_3 = b_5 = \dots = 0$$

$$4b_2 = 1, \quad (2k)^2.b_{2k} + b_{2k-2} = (-1)^{k+1}.\frac{4k}{2^{2k}.(k!)^2}, \quad k > 1$$

$$b_2 = \frac{1}{2^2}$$

$$b_4 = -\frac{1}{2^2\,4^2}\cdot\left(1+\frac{1}{2}\right) = -\frac{1}{2^4\cdot(2!)^2}\left(1+\frac{1}{2}\right)$$

- - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - -

$$b_{2k} = (-1)^{k+1}\cdot\frac{1}{2^{2k}\cdot(k!)^2}\left(1+\frac{1}{2}+\ldots+\frac{1}{k}\right) \qquad (54)$$

y la expresión de $K_0(x)$ queda:

$$K_0(x) = \sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^{k+1}}{(k!)^2}\cdot\left(1+\frac{1}{2}+\ldots+\frac{1}{k}\right)\left(\frac{x}{2}\right)^{2k} + J_0(x)\cdot Lx$$

En el estudio teórico con funciones de Bessel, se suele sustituir la función $K_0(x)$ por una determinada combinación lineal de las funciones $J_0(x)$ y $K_0(x)$ que se llama función de Bessel de orden cero de segunda especie y se representa por $Y_0(x)$.

$$Y_0(x) = -\frac{2}{\pi}\cdot\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^k}{(k!)^2}\left(1+\frac{1}{2}+\ldots+\frac{1}{k}\right)\left(\frac{x}{2}\right)^{2k} + \frac{2}{\pi}\cdot J_0(x)\cdot\left[L\frac{x}{2}+\gamma\right] \qquad (55)$$

donde aparece la constante de Euler

$$\gamma = -\Gamma'(1) = 1 + \sum_{n=2}^{\infty}\left(\frac{1}{n}+L\frac{n-1}{n}\right) = 0,5772156\ldots$$

La ecuación general de la ecuación (50) será:

$$y(x) = c_1\cdot J_0(x) + c_2\cdot Y_0(x)$$

Tercer caso. $\alpha = n$, siendo n un número entero. De acuerdo con el teorema demostrado en la pregunta anterior, la segunda solución de la ecuación de Bessel será de la forma

$$K_n(x) = \sum_{k=0}^{\infty} b_k\cdot x^{k+n} + c\cdot J_n(x)\cdot Lx$$

siendo c una constante arbitraria. Derivando dos veces y sustituyendo en la ecuación de Bessel obtenemos c y $b_k$, quedando para $K_n(x)$ la siguiente expresión

$$K_n(x) = -\frac{1}{2}\sum_{k=0}^{n-1}\frac{(n-k-1)!}{k!}\cdot\left(\frac{x}{2}\right)^{2k-n} - \frac{H_n}{2n!}\left(\frac{x}{2}\right)^n -$$

$$-\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^k\cdot[H_k+H_{n+k}]}{k!(n+k)!}\left(\frac{x}{2}\right)^{2k+n} + J_n(x)\cdot Lx$$

siendo $H_n = 1 + \frac{1}{2} + \ldots + \frac{1}{n}$.

De modo análogo al considerado en el caso anterior, se suele sustituir $K_n(x)$ por cierta combinación lineal de $K_n(x)$ y $J_n(x)$ que se llama función de Bessel de orden n de segunda especie y que se representa con la notación $Y_n(x)$ teniendo como expresión

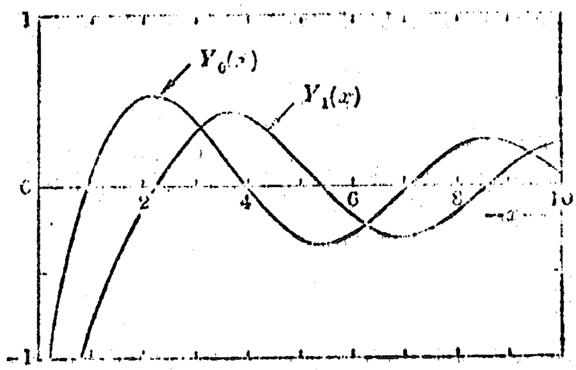
$$Y_n(x) = -\frac{1}{\pi} \cdot \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(n-k-1)!}{k!} \left(\frac{x}{2}\right)^{2k-n} - \frac{H_n}{\pi(n!)} \left(\frac{x}{2}\right)^n -$$

$$-\frac{1}{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k [H_k + H_{n+k}]}{k!(n+k)!} \left(\frac{x}{2}\right)^{2k+n} + \frac{2}{\pi} \cdot J_n(x) \cdot \left[L\frac{x}{2} + \gamma\right]$$

La solución general de la ecuación de Bessel será en este caso

$$y(x) = c_1 \cdot J_n(x) + c_2 \cdot Y_n(x)$$

La variación de $Y_0(x)$ é $Y_1(x)$ para un intervalo de valores de x se muestra gráficamente en la figura.




A la función $Y_n(x)$ se le conoce también con el nombre de función de Weber Bessel de segunda clase de orden n.

También son soluciones particulares de la ecuación de Bessel las funciones de Hanker Bessel de tercera clase de orden n, $H_n^{(1)}(x)$ y $H_n^{(2)}(x)$ definidas así:

$$H_n^{(1)} = J_n(x) + j \cdot Y_n(x)$$

$$H_n^{(2)} = J_n(x) - j \cdot Y_n(x)$$

con lo que la solución general de la ecuación de Bessel se podría poner tambien de la forma:

$$y(x) = c_1 \cdot H_n^{(1)}(x) + c_2 \cdot H_n^{(2)}(x)$$

Las funciones de Bessel $Y_n(x)$, $H_n^{(1)}(x)$, $H_n^{(2)}(x)$ satisfacen las mismas ecuaciones diferenciales y relaciones de recurrencia que la función $J_n(x)$.

Otra función importante es la función de Neumann $N_\alpha(x)$ definida así:

$$N_\alpha(x) = \frac{J_\alpha(x).\cos\pi\alpha - J_{-\alpha}(x)}{\operatorname{sen}\pi\,\alpha}$$

definida para valores de $\alpha$ no enteros, cumple las relaciones

$$Y_0(x) = \lim_{\alpha \to n} N_\alpha(x); \quad Y_n(x) = \lim_{\alpha \to n} N_\alpha(x)$$

9.- <u>Propiedades de las funciones de Bessel</u>.-

Partiendo del desarrollo en serie de $J_\alpha(x)$ obtenido en (46), y teniendo en cuenta que $\Gamma(\alpha+k+1) = (\alpha+k).\Gamma(\alpha+k)$, se puede escribir:

$$\frac{d}{dx}[x^\alpha . J_\alpha(x)] = \frac{d}{dx}\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{2^{2k+\alpha}.k!\,\Gamma(\alpha+k+1)}\, x^{2k+2\alpha} =$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k.\,2(\alpha+k)}{2^{2k+\alpha}.k!\,\Gamma(\alpha+k+1)}.x^{2k+2\alpha-1} = x^\alpha \,.\, \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{2^{2K+\alpha-1}.k!\,\Gamma(\alpha+k)}.x^{2k+(\alpha-1)} =$$

$$= x^\alpha . J_{\alpha-1}$$

luego queda la siguiente propiedad

$$\frac{d}{dx}[x^\alpha . J_\alpha(x)] = x^\alpha . J_{\alpha-1}(x) \tag{56}$$

y de modo análogo obtendríamos

$$\frac{d}{dx}[x^{-\alpha} . J_\alpha(x)] = -x^{-\alpha} . J_{\alpha+1}(x) \tag{57}$$

La ecuación (56) se transforma, desarrollando las derivadas del primer miembro, en

$$\alpha . x^{\alpha-1} . J_\alpha(x) + x^\alpha . J'_\alpha(x) = x^\alpha . J_{\alpha-1}(x)$$

y dividiendo por $x^{\alpha-1}$ queda

$$\alpha . J_\alpha(x) + x . J'_\alpha(x) = x . J_{\alpha-1}(x) \tag{58}$$

y de modo análogo con (57), obtendríamos

$$-\alpha . J_\alpha(x) + x . J'_\alpha(x) = -x . J_{\alpha+1}(x) \qquad (59)$$

Sumando y restando (58) y (59) obtenemos las siguientes leyes de recurrencia:

$$\begin{cases} 2\, J'_\alpha(x) = J_{\alpha-1}(x) - J_{\alpha+1}(x) & (60) \\ 2\alpha . J_\alpha(x) = x . J_{\alpha-1}(x) + x . J_{\alpha+1}(x) & (61) \end{cases}$$

La segunda relación es valiosísima para obtener $J_{\alpha+1}$ conociendo $J_{\alpha-1}$ y $J_\alpha$, o bien $J_{\alpha-1}$ conocidas $J_\alpha$ y $J_{\alpha+1}$. Así para el cálculo de las funciones de Bessel de primera especie de órdenes enteros bastará tener tabuladas $J_0(x)$ y $J_1(x)$.

La primera relación permite fácilmente calcular la derivada de una función de Bessel de primera especie en función de las de orden superior e inferior en una unidad.

Veamos ahora las funciones de Bessel de orden $n + \frac{1}{2}$ (n entero). Para ello, calculemos primero $J_{1/2}(x)$, haciendo $\alpha = \frac{1}{2}$ en el desarrollo de $J_\alpha(x)$

$$J_{1/2}(x) = \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{2}} . \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k!\,\Gamma(\frac{3}{2}+k)} . \left(\frac{x}{2}\right)^{2k} = \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{2} . \Gamma(\frac{3}{2})} . \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{2^k . k!\, 3 . 5 \ldots (2k+1)} . x^{2k} =$$

$$= \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{2}\,\Gamma(\frac{3}{2})} \left[1 - \frac{x^2}{2.3} + \frac{x^4}{2.4.3.5} - \frac{x^6}{2.4.6.3.5.7} + \ldots\right] =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2x}\,\Gamma(\frac{3}{2})} \left[x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \ldots\right] = \frac{1}{\sqrt{2x} . \Gamma(\frac{3}{2})} . \operatorname{sen} x = \sqrt{\frac{2}{\pi x}} . \operatorname{sen} x \qquad (62)$$

De modo análogo obtendríamos

$$J_{-1/2}(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi x}} . \cos x \qquad (63)$$

Mediante la fórmula de recurrencia (61), podríamos obtener

$$J_{3/2}(x) = -J_{-1/2}(x) + \frac{1}{x} . J_{1/2}(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \left[\frac{\operatorname{sen} x}{x} - \cos x\right]$$

$$J_{5/2}(x) = -J_{1/2}(x) + \frac{3}{x} . J_{3/2}(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \left[\frac{3 \operatorname{sen} x}{x^2} - \frac{3 \cos x}{x} - \operatorname{sen} x\right]$$

y así sucesivamente. Por aplicación reiterada de la fórmula de recurrencia obtendríamos $J_{n+\frac{1}{2}}(x)$ que sería de la forma

$$J_{n+\frac{1}{2}}(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi x}}\,[R_1(x).\operatorname{sen} x + R_2(x).\cos x]$$

siendo $R_1$, $R_2$ funciones racionales de x.

De todo lo visto hasta ahora se desprende que toda solución no trivial de la ecuación de Bessel de orden $\alpha$ tiene infinitos ceros para $x > 0$ y que la distancia entre ceros sucesivos tiende a $\pi$ cuando x tiende a $\infty$. Así pues $J_\alpha$ y $J_{-\alpha}$ (é $Y_\alpha$) son funciones oscilantes, decreciendo la amplitud de sus oscilaciones al crecer x. Así pues, las gráficas de $J_\alpha$ y $J_{-\alpha}$(ó de $Y_\alpha$) tienen carácter oscilatorio amortiguamiento, como se confirma en el cálculo de $J_{n+\frac{1}{2}}$. Se podría demostrar que toda solución de Bessel de orden $\alpha$ se puede escribir de la forma

$$y(x) = \frac{A_\alpha}{\sqrt{x}}.\operatorname{sen}(x+\omega_\alpha) + \frac{r_\alpha(x)}{\sqrt{x^3}}$$

siendo $A_\alpha$ y $\omega_\alpha$ constantes cuyos valores dependen de $\alpha$, y $r_\alpha$ una función de x que depende también de $\alpha$ y es tal que está acotada cuando $x \to \infty$. Así, para valores muy grandes de x, un valor aproximado de y(x) es la función sinusoidal amortiguada

$$\frac{A_\alpha}{\sqrt{x}}.\operatorname{sen}(x+\omega_\alpha)$$

cumpliéndose que $\lim\limits_{x\to\infty} y(x) = 0$.

10.- Funciones modificadas de Bessel.-

Al tratar de resolver la ecuación de Laplace en coordenadas cilíndricas, se llega a la ecuación diferencial

$$y'' + \frac{1}{x}\,.\,y' - (1+\frac{\alpha^2}{x^2})y = 0 \qquad (64)$$

Si se procede del mismo modo que en la ecuación de Bessel, se obtendrá como solución de (64), en el caso de que $\alpha$ no es nulo ni entero, la expresión

$$y(x) = c_1.I_\alpha(x) + c_2.I_{-\alpha}(x) \qquad (65)$$

Las funciones $I_\alpha(x)$ é $I_{-\alpha}(x)$ son las de primera especie modificadas, siendo $c_1$ y $c_2$ constantes arbitrarias y estando $I_\alpha(x)$ e $I_{-\alpha}(x)$ definidas por la ecuación

$$I_\alpha(x) = (j)^{-\alpha} . J_\alpha(jx) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!\Gamma(\alpha+k+1)} \left(\frac{x}{2}\right)^{\alpha+2k} \qquad (66)$$

A este resultado se podría haber hallado en la misma ecuación diferencial efectuando el cambio de x por jx en ella.

Otra función modificada de segunda especie es la $K_\alpha(x)$ definida así:

$$K_\alpha(x) = \frac{\pi}{2} \frac{I_{-\alpha}(x) - I_\alpha(x)}{\operatorname{sen} \pi \alpha} \qquad (67)$$

Si $\alpha$ es un número entero n, $I_{-n}(x)$ será un múltiplo de $I_n(x)$. La solución general de (64) se puede expresar, razonando de modo similar al que se consideró en la de Bessel, de la siguiente manera

$$y(x) = c_1 . I_n(x) + c_2 . K_n(x) \qquad (68)$$

siendo:

$$K_n(x) = \lim_{\alpha \to n} K_\alpha(x)$$

11.- Funciones ber, bei, ker y kei.-

Kelvin introdujo dos nuevas funciones ber(x) y bei(x), considerando las partes reales e imaginarias de la función de Bessel modificada de primera especie, de argumento $(j^{1/2}x)$, o sea

$$I_{-\alpha}(j^{1/2}x) = \operatorname{ber}_\alpha(x) + j.\operatorname{bei}_\alpha(x) = J_\alpha(x.\sqrt{-j}) \qquad (69)$$

En particular para $\alpha = 0$, sale:

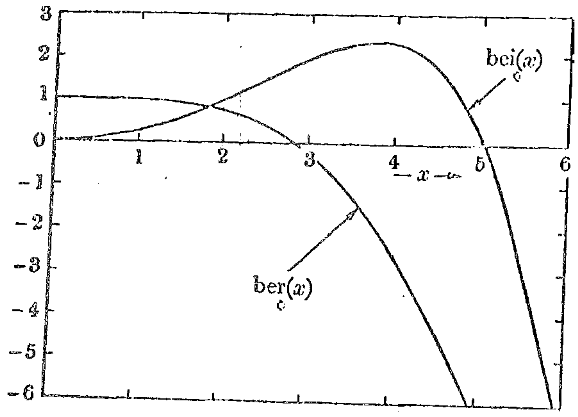
$$\operatorname{ber}_0(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k . x^{4k}}{(2k)!\ 2^{4k}} \qquad \operatorname{bei}_0(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k . x^{4k+2}}{[(2k+1)!]^2 . 2^{4k+2}}$$

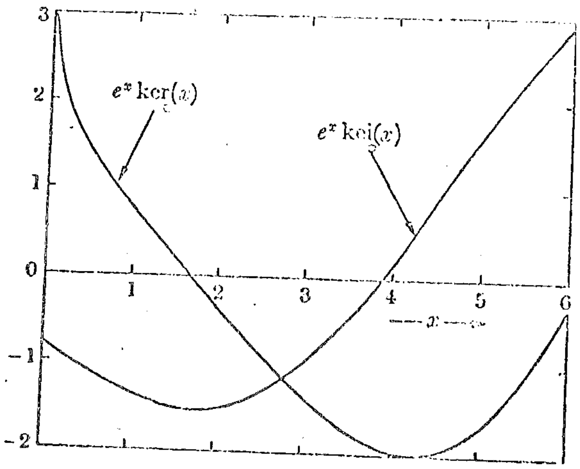
De modo similar se definen las funciones $\operatorname{ker}_\alpha(x)$ y $\operatorname{kei}_\alpha(x)$ como partes reales e imaginaria de la función compleja $K_\alpha(j^{1/2}x)$, o sea:

$$K_\alpha(j^{1/2}x) = \operatorname{ker}_\alpha(x) + j.\operatorname{kei}_\alpha(x)$$

En particular para $\alpha = 0$ se obtienen $\operatorname{ker}_0(x)$ y $\operatorname{kei}_0(x)$.

Las cuatro funciones definidas se utilizan frecuentemente en las aplicaciones eléctricas de la ingeniería. Las figuras muestran las variaciones de estas fun ciones con x.



# 12

# Problemas

# de

# Contorno

# LECCION 12

## PROBLEMAS DE CONTORNO

### 1.- Funciones de Green.-

El teorema en existencia y unicidad de la integral de una ecuación diferencial de orden se establece la solución de la misma, dados los valores de la función y de sus n-1 primeras derivadas, para un valor inicial de la variable. Verificadas las condiciones de existencia, el problema de hallar la integral particular, dada - tales condiciones iniciales, es un problema determinado.

Ocurre en otros casos que se desea hallar una función en un intervalo $I = [a, b]$ que, además de verificar la ecuación diferencial, cumplan la función y sus derivadas, determinadas condiciones en los extremos del intervalo. Este tipo de problemas se llama de "condiciones de contorno" o "problema de contorno". Se llama así porque los puntos a y b suelen ser los extremos del intervalo en el que se estudia la función incógnita en las aplicaciones de tales problemas.

Consideremos la ecuación lineal no homogénea de orden n

$$x^{(n} + a_{n-1}(t) \cdot x^{(n-1} + \dots + a_o(t) \cdot x = h(t)$$

definida en el intervalo I de variación de t, y sea h solución general de la homogénea:

$$x_h = c_1 \cdot x_1(t) + c_2 \cdot x_2(t) + \dots + c_n x_n(t)$$

Para hallar la solución general de la completa aplicamos el método de variación de constantes, y escribimos la solución general de la completa de la siguiente forma

$$x = c_1(t) \cdot x_1(t) + c_2(t) \cdot x_2(t) + \dots + c_n(t) \cdot x_n(t)$$

Las funciones $c_i(t)$ son soluciones del sistema

$$\begin{cases} c_1'.x_1 + \dots + c_n'.x_n = 0 \\ c_1'.x_1' + \dots + c_n'.x_n' = 0 \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ c_1'.x_1^{(n-2} + \dots + c_n'.x_n^{(n-2} = 0 \\ c_1'.x_1^{(n-1} + \dots + c_n'.x_n^{(n-1} = h(t) \end{cases}$$

De donde sale

$$c_k'(t) = \frac{V_k(t).\,h(t)}{W[x_1(t), \dots, x_n(t)]}$$

siendo $W[x_1(t), \dots, x_n(t)]$ el determinante wronskiano relativo a las funciones $x_1(t)$, $, \dots, x_n(t)$ y $V_k(t)$ el determinante obtenido al sustituir la columna k del wronskiano W por $(0, 0, \dots, 1)$

La solución particular de la completa, que cumple las condiciones iniciales

$$x(t_o) = x'(t_o) = \dots = x^{(n-1}(t_o) = 0$$

será

$$x(t) = \int_{t_o}^{t} \frac{x_1(t).V_1(u) + \dots + x_n(t).V_n(u)}{W[x_1(u), \dots, x_n(u)]} .\, h(u).du$$

si llamamos

$$k(t, u) = \frac{x_1(t).V_1(u) + \dots + x_n(t).V_n(u)}{W[x_1(u), \dots, x_n(u)]}$$

la solución particular x(t) anterior, la podemos escribir así

$$x(t) = \int_{t_o}^{t} k(t, u).h(u).du$$

Si consideramos el operador diferencial lineal L

$$L = D^n + a_{n-1}(t).D^{n-1} + \dots + a_1(t).D + a_o(t)$$

a la función $k(t,u)$ la denominaremos <u>Función de Green</u> para el operador L (para - problemas de valores iniciales en el intervalo I). Mediante la expresión

$$G(h)(t) = \int_{t_o}^{t} k(t,u).h(u).du$$

se define un nuevo operador, con la propiedad de que

$$G(h)(t_o) = G'(h)(t_o) = \dots = G^{(n-1}(h)(t_o) = 0$$

De la definición de $k(t,u)$ se desprende que:

1) $k(t,u)$ está definida en $I \times I = R$

2) Las funciones $k, \frac{\partial k}{\partial x}, \dots, \frac{\partial^n k}{\partial_x n}$ son continuas en R

3) Para todo $t_o \in I$, la función

$$x(t) = \int_{t_o}^{t} k(t,u).h(u).du$$

Satisface la ecuación diferencial, así como las condiciones iniciales,

$$\begin{cases} Lx = h \\ x(t_o) = x'(t_o) = \dots = x^{(n-1}(t_o) = 0 \end{cases}$$

<u>Definición</u>

Una función $H(t,u)$ se dice que es una función de Green para problemas de valores iniciales en que intervenga el operador diferencial lineal L, si y sólo si $H(t,u)$ verifica las condiciones (1), (2) y (3).

Por comodidad representaremos la derivada $\frac{\partial^i H}{\partial t^i}$ mediante $H_i$. Con esta notación vamos a dar otra definición de la función de Green para L.

Teorema

Sea $H(t,u)$ una función definida en R y sean $H, H_1, \ldots, H_n$ continuas en todo R. En este caso la función $H(t,u)$ es una función de Green para el operador L si y sólo si se verifica en todo R:

$$\left.\begin{aligned} &H(t,t) = H_1(t,t) = \ldots = H_{n-2}(t,t) = 0 \; ; \; H_{n-1}(t,t) = 1 \\ &H_n(t,u) + a_{n-1}(t) \cdot H_{n-1}(t,u) + \ldots + a_0(t) \cdot H(t,u) \equiv 0 \end{aligned}\right\} \tag{1}$$

Demostración. - Supongamos que $H(t,u)$ es una función de Green para L, entonces:

$$x(t) = \int_{t_0}^{t} H(t,u)\, h(u) du \tag{2}$$

cumpliéndose

$$\begin{cases} Lx = h \\ x(t_0) = x'(t_0) = \ldots = x^{(n-1)}(t_0) = 0 \end{cases}$$

para todo $t_0 \in I$; derivando (2) :

$$\frac{dx(t)}{dt} = \int_{t_0}^{t} H_1(t,u)\; h(u) du + H(t,t) h(t) \tag{3}$$

y para $t=t_0$: $H(t_0,t_0)\; h(t_0) = 0$, pero como por hipótesis esto es válido para toda $h \in C(I)$; tomando $h \equiv 1$ tendremos:

$$H(t_0, t_0) = 0$$

y como $t_0$ es arbitrario:

$$H(t,t) = 0$$

por tanto:

$$x'(t) = \int_{t_0}^{t} H_1(t,u)\; h(u)\; du \tag{4}$$

volviendo a derivar

$$x''(t) = \int_{t_o}^{t} H_2(t,u)h(u)\,du + H_1(t,t)h(t)$$

de donde: $H_1(t,t) = 0$ luego:

$$x''(t) = \int_{t_o}^{t} H_2(t,u)h(u)\,du$$

continuando así, llegaríamos a:

$$H_{n-2}(t,t) = 0$$

$$x^{(n-1}(t) = \int_{t_o}^{t} H_{n-1}(t,u)\,h(u)\,du$$

y derivando nuevamente:

$$x^{(n}(t) = \int_{t_o}^{t} H_n(t,u)\,h(u)\,du + H_{n-1}(t,t)\,h(t)$$

de donde: $x^{(n}(t_o) = H_{n-1}(t_o,t_o)\,h(t_o)$ (5)

y como $L\,x(t_o) = x^{(n}(t_o) + a_{n-1}(t_o)\,x^{(n-1}(t_o) + \ldots + a_o(t_o)x(t_o) = h(t_o)$ por las condiciones iniciales: $x^{(n}(t_o) = h(t_o)$ y como $h$ y $t_o$ son arbitrarios, por (5) será:

$$H_{n-1}(t,t) \equiv 1$$

y de aqui:

$$x^{(n}(t) = \int_{t_o}^{t} H_n(t,u)\,h(u)\,du + h(t).$$

Para probar la última de las igualdades de (1), sustituimos en $Lx = h$ todas las fórmulas obtenidas:

$$\int_{t_0}^{t} [H_n(t,u) + a_{n-1}(t)\, H_{n-1}(t,u) + \dots + a_0(t)\, H(t,u)]\, h(u)\,du = 0$$

y como esta expresión se verifica para todo $t_0 \in I$ y todo $h \in C(I)$ tendremos que:

$$H_n(t,u) + a_{n-1}(t)\, H_{n-1}(t,u) + \dots + a_0(t)\, H(t,u) \equiv 0$$

El reciproco es una simple comprobación.

Una consecuencia importante del teorema anterior es que fijado un $t_0 \in I$ cualquiera, la función:

$$k(t) = H(t, t_0)$$

es una solución del problema de Cauchy

$$\begin{cases} Lx = 0 \\ x(t_0) = x'(t_0) = \dots = x^{(n-2)}(t_0) = 0 \\ x^{(n-1)}(t_0) = 1 \end{cases}$$

y como la solución de éste es única, trivialmente $H(t,u)$ queda unívocamente determinada por el operador $L$ sobre el segmento rectilineo compuesto por los puntos $(t,u)$ con $u = t_0$, y como esto es cierto para todo $t_0 \in I$, podemos enunciar el siguiente teorema:

Teorema.- "La función de Green para los problemas de valores iniciales en $I$ en que aparece un operador diferencial lineal $L$, está unívocamente determinada por $L$ y por tanto debe coincidir con la función $k(t,u)$ que definimos. En particular, $k(t,u)$ es independiente de la base elegida para las soluciones de $Lx = 0$, usada para calcularla".

Finalmente podemos enunciar el siguiente:

Teorema.- "La función de Green para un operador diferencial lineal con coeficientes constantes $L$, puede escribirse en la forma: $k(t-u)$ donde $k(t)$ es la solución en $(-\infty, +\infty)$ del problema de Cauchy:

$$\begin{cases} Lx = 0 \\ x(0) = x'(0) = \dots = x^{(n-2)}(0) = 0 \;;\quad x^{(n-1)}(0) = 1 \end{cases}$$

Demostración. - La función $H(t,u) = k(t-u)$ satisface las condiciones (1) y por tanto es la función de Green para L.

2. - Problemas con valores en la frontera. -

Consideremos una ecuación diferencial lineal:

$$Lx = h \tag{1}$$

siendo L un operador diferencial lineal de segundo orden definido en un intervalo finito $[a,b]$ y consideremos también las condiciones de contorno:

$$\begin{cases} \alpha_1 x(a) + \alpha_2 x(b) + \alpha_3 x'(a) + \alpha_4 x'(b) = \gamma_1 \\ \beta_1 x(a) + \beta_2 x(b) + \beta_3 x'(a) + \beta_4 x'(b) = \gamma_2 \end{cases} \tag{2}$$

y $h \in C[a,b]$

donde las $\alpha_i$, $\beta_i$, $\gamma_i$ son constantes. El problema de contorno o problema con valores en la frontera, consiste en encontrar todas las funciones $x(t)$ solución de (1) que verifican (2).

Con objeto de excluir ciertos casos triviales, se exige que al menos una de las $\alpha_i$ y una de las $\beta_i$ sean no nulas y que los primeros miembros de (2) sean linealmente independientes. Además, para asegurar que realmente se está considerando un problema con valores en la frontera y no un problema de valores iniciales, también se requiere que (2) tenga términos no nulos, incluyendo cada extremo del intervalo.

Cuando las condiciones frontera verifican que $\gamma_1 = \gamma_2 = 0$, se dice que son homogeneas. En este caso, el conjunto de las funciones que verifican (2) es un subespacio vectorial s y considerando entonces a L como una transformación lineal de s, el problema se nos convierte en el de resolver la ecuación $Lx = h$ donde $h \in C[a,b]$ y $x \in s$. A pesar de su simplicidad, esta observación es importante porque muestra que las condiciones frontera solo influyen en el problema para determinar el espacio sobre el que actua L.

El conjunto formado por todas las soluciones de (1), (2) consiste en todas las funciones de la forma $x_H + x_p$ siendo $x_p$ una solución particular determinada del problema, y $x_H$ la solución general del problema homogeneo asociado:

$$Lx = 0$$

$$\begin{cases} \alpha_1 x(a) + \alpha_2 x(b) + \alpha_3 x'(a) + \alpha_4 x'(b) = 0 \\ \beta_1 x(a) + \beta_2 x(b) + \beta_3 x'(a) + \beta_4 x'(b) = 0 \end{cases}$$

Consideremos ahora la ecuación diferencial:

$$x'' + a_1(t)x' + a_0(t).x = 0$$

con $a_i \in C(a,b)$; o bien su forma autoadjunta:

$$L(x) = [p(t)x']' - q(t)x = 0 \qquad (3)$$

donde:

$$p(t) = e^{\int_a^t a_1(u)du}$$

$$q(t) = -p(t).a_0(t)$$

por lo que $p, q \in C[a,b]$ y además $p(t) > 0$ en $[a,b]$.

La ecuación anterior es equivalente al sistema:

$$\begin{cases} x' = z/p(t) \\ z' = q(t)x \end{cases} \qquad (3')$$

Sean $x(t)$ y $z(t)$ un par de funciones solución de (3') y $x(t) \not\equiv 0$, entonces, por el teorema de unicidad, las funciones $x(t)$ y $z(t)$ no pueden anularse simultaneamente en cualquier punto de $[a,b]$. Considerando entonces $x(t) \not\equiv 0$ hagamos:

$$\begin{cases} x(t) = Q(t)\ \mathrm{sen}\,\Theta(t) \\ z(t) = Q(t)\ \cos\Theta(t) \\ Q(t) = [(x(t))^2 + (z(t)^2]^{1/2} > 0 \end{cases} \qquad (4)$$

transformándose (3') en el sistema:

$$\begin{cases} Q' = [\frac{1}{p(t)} + q(t)]\,Q\,\mathrm{sen}\,\Theta\cos\Theta \\ \Theta' = \frac{1}{p(t)}\cos^2\Theta - q(t)\,\mathrm{sen}^2\Theta \end{cases} \qquad (5)$$

como la segunda ecuación no contiene la incognita $Q$, podemos encontrar una solución $\Theta$. Entonces, sustituyendo $\Theta$ en la primera ecuación, obtenemos la solución general

$$Q(t) = Q(a)\ \exp\left[\int_a^t \left(\frac{1}{p(u)} + q(u)\right)\mathrm{sen}\,\Theta(u)\cos\Theta(u)du\right]$$

y tomando $Q(a) > 0$ podemos encontrar una solución positiva $Q(t)$ para la cual, combinando con la solución $\Theta(t)$, obtenemos una solución $x(t) = Q(t)\,\mathrm{sen}\,\Theta(t)$ no identicamente nula de (3).

Para todo entero n, $\Theta(t)+2\pi n$ es tambien una solución de la segunda ecuación de (5). Además, la parte derecha de la primera ecuación de (5), es una función periódica de $\Theta$ con periodo $2\pi$.

Teorema. - "Mediante una solución $\Theta(t)$ de la segunda ecuación de (5), queda determinada en forma única (salvo el factor multiplicativo $\varrho(a)$) una solución positiva de la primera ecuación, de esta manera la solución $x(t)$ correspondiente en la ecuación original queda determina en forma única (salvo el factor $\varrho(a)$). Si $x_1(t)$ y $x_2(t)$ son las soluciones correspondientes a las soluciones $\Theta_1(t)$ y $\Theta_2(t) = \Theta_1(t) + 2\pi n$ respectivamente, entonces $x_1(t)$ y $x_2(t)$ son linealmente dependientes.

Inversamente, si dos soluciones $x_1(t) = \varrho_1(t)$ sen $\Theta_1(t)$ y $x_2(t) = \varrho_2(t) \operatorname{sen} \Theta_2(t)$ son linealmente dependientes, entonces, para algun entero n: $\Theta_2(t) = \Theta_1(t) + 2n\pi$.

Para finalizar la demostración, sea $x_1(t) = Cx_2(t)$. Entonces $x_1'(t) = C\, x_2'(t)$ y:

$$z_1(t) = p(t)\, x_1'(t) = C\, p(t) x_2'(t) = Cz_2(t).$$

esto es: $\varrho_1(t) = C\, \varrho_2(t)$ e inmediatamente se obtiene:

$$\Theta_2(t) = \Theta_1(t) + 2n\pi.$$

Por lo ya visto, la dependencia lineal de dos soluciones $x_1(t) \not\equiv 0$ y $x_2(t) \not\equiv 0$ de la ecuación original, corresponde a la relación de congruencia:

$$\Theta_1(t) \equiv \Theta_2(t) \pmod{2\pi}$$

Además, una condición inicial para $\Theta(t)$: $\Theta(a) = \alpha$ corresponde a la relación lineal homogenea:

$$p(a)\, x'(a) \operatorname{sen} \alpha - x(a) \cos \alpha = 0$$

entre $x(a)$ y $x'(a)$ como se deduce facilmente de (3') y (4). Se ve tambien que las condiciones iniciales:

$$\Theta(a) = \alpha \qquad\qquad \varrho(a) = \varrho_0$$

se corresponden con: $x(a) = x_0, x'(a) = x'_0$. En lo que sigue estudiaremos el problema de encontrar la solución $x(t)$ correspondiente a la solución $\Theta(t)$ satisfaciendo las condiciones frontera:

$$\Theta(a) = \alpha \qquad\qquad \Theta(b) = \beta \tag{6}$$

Condiciones correspondientes a:

$$\begin{cases} p(a)x'(a)\operatorname{sen}\alpha - x(a)\cos\alpha = 0 \\ p(b)x'(b)\operatorname{sen}\beta - x(b)\cos\beta = 0 \end{cases} \qquad (6')$$

En general, la solución $x(t)$ de (3) satisfaciendo (6') no esta determinada en forma única. De hecho, si $x_1(t)$ y $x_2(t)$ satisfacen (3) y (6'), entonces para cualesquiera constantes $C_1$ y $C_2$:

$$C_1\, x_1(t) + C_2 x_2(t)$$

tambien satisface (3) y (6'). Así, el problema de contorno consistente en encontrar una solución de (3) satisfaciendo (6') es esencialmente diferente del problema de Cauchy.

Vamos ahora a considerar una ecuación, conteniendo un parámetro complejo $\lambda$:

$$[p(t)x']' - q(t)x + \lambda\, r(t)x = 0 \qquad (7)$$

siendo $r(t)$ una función continua y positiva en $[a,b]$. El problema de STURM-LIOUVILLE consiste en encontrar una solución no trivial $x(t)$ de (7) satisfaciendo las condiciones frontera (6'). En general, la solución puede no existir para todos los valores de $\lambda$.

El problema de los autovalores consiste en determinar los valores de $\lambda$ para los que existe solución del problema de contorno planteado. Los valores anteriormente citados se llamarán autovalores y las soluciones correspondientes autofunciones del autovalor considerado. En lo que sigue, vamos a reducir el problema de los autovalores al de una ecuación integral con núcleo simétrico.

3.- Función de Green para condiciones de contorno.-

Sea el operador diferencial:

$$L(x) = \frac{d}{dt}\left[ p(t)\frac{dx}{dt}\right] - q(t).x$$

donde $p$, $q$ y $p'$ son continuos en $[a,b]$. Como $L$ es autoadjunto, verificará la identidad de Lagrange:

o sea

$$xL(z) - z\,L(x) = \frac{d}{dt}\left\{[x(t)\,z'(t) - x'(t)\,z(t)^{(*)}]\,p(t)\right\}$$

que integrada, nos da:

$$\left\{p(t)\,[\,x(t)\,z'(t) - x'(t)\,z(t)\,]\right\}_{t=a'}^{t=b'} = \int_{a'}^{b'}[\,xL(z) - z\,L(x)\,]\,dt \qquad (9)$$

para: $a \leqslant a' \leqslant b' \leqslant b$. (también llamada Fórmula de Green).

En particular, si dos funciones $x(t)$ y $z(t)$ satisfacen las condiciones frontera (6'), es inmediato que:

$$\int_a^b [\,xL(z) - zL\,(x)\,]\,dt = 0 \qquad (10)$$

Supongamos ahora que dos funciones $x_1(t) \not\equiv 0$ y $x_2(t) \not\equiv 0$ satisfacen:

$$\begin{cases} L(x_1) = 0 \\ p(a)x_1'(a)\,\mathrm{sen}\,\alpha - x_1(a)\cos\alpha = 0 \end{cases} \qquad (11)$$

y:

$$\begin{cases} L(x_2) = 0 \\ p(b)x_2'(b)\,\mathrm{sen}\,\beta - x_2(b)\cos\beta = 0 \end{cases} \qquad (12)$$

y supongamos que ambas funciones son linealmente independientes. Sea:

$$C(\xi) = p(\xi)\,.\,W\,[x_1(\xi),\ x_2(\xi)]$$

derivando:

$$\frac{dC}{d\xi} = \frac{d}{d\xi}\,[\,p(\xi)\,.\,W\,[x_1(\xi),\ x_2(\xi)]]$$

y por (8):

---

(*) $[\,x(t)\,.\,z'(t) - x'(t)\,z(t)] = W\,[\,x(t),\ z(t)\,]$.

$$\frac{dC}{d\xi} = x_1 \, L(x_2) - x_2 \, L(x_1)$$

y por (11) y (12), será: $\frac{dC}{d\xi} = 0$ y por tanto C será constante. Además, la independencia lineal de $x_1$ y $x_2$ implica que $C \neq 0$ pues, en otro caso, como $p(t) > 0$ sería $W(x_1, x_2) = 0$ y $x_1$, $x_2$ serian linealmente dependientes.

Vamos ahora a definir la siguiente función:

$$G(t,\xi) = \begin{cases} -\frac{1}{C}\, x_1(\xi)\,.\,x_2(t) & \text{si } t \geqslant \xi \\ \\ -\frac{1}{C}\, x_1(t)\,.\,x_2(\xi) & \text{si } t < \xi \end{cases} \tag{13}$$

La función $G(t,\xi)$ es llamada <u>función de Green para la ecuación $L(x) = 0$ restringida por las condiciones de contorno (6')</u>.

Obviamente, la función de Green $G(t,\xi)$ tiene las siguientes propiedades:

A.- $G(t,\xi)$ es continua para cada punto del dominio $a \leqslant t$, $\xi \leqslant b$. Considerada como función de t, $G(t,\xi)$ satisface las condiciones frontera para todo $\xi$

B.- Si $t \neq \xi$, $G(t,\xi)$ satisface $L(G) = 0$ como función de t. Además, $G_t(t,\xi)$ y $\frac{\partial}{\partial t}\,[p(t)\; G_t(t,\xi)]$ están acotadas en la región $t \neq \xi$, $a \leqslant t$, $\xi \leqslant b$.

C.- $G(t,\xi) \equiv G(\xi, t)$.

D.- Si $a < t_o < b$, entonces cuando $t \to t_o$, $\xi \to t_o$ guardando la relación $t > \xi$ y cuando $t \to t_o$, $\xi \to t_o$ guardando la relación $t < \xi$, $G_t(t,\xi)$ tiende a valores finitos: $G_t(t_o +, t_o)$ y $G_t(t_o -, t_o)$ respectivamente, y:

$$G_t(t_o +, t_o) - G_t(t_o -, t_o) = -1/p(t_o)$$

4.- <u>Reducción a una ecuación integral</u>.-

Mediante el uso de la función de Green y de sus propiedades, vamos a probar ahora dos importantes teoremas.

<u>Teorema</u>.- "Sea $\varphi \in C\,(a,b)$. Si x(t) es una solución del problema de contorno:

$$L(x) = -\varphi(t) \tag{14}$$

$$\begin{cases} p(a)\; x'(a) \operatorname{sen} \alpha - x(a) \cos \alpha = 0 \\ p(b)\; x'(b) \operatorname{sen} \beta - x(b) \cos \beta = 0 \end{cases} \tag{6'}$$

entonces $x(t)$ puede expresarse en la forma:

$$x(t) = \int_a^b G(t,\xi)\ \varphi(\xi)\, d\xi \text{ ''} \qquad (15)$$

Demostración. - Apliquemos la fórmula de Green integrando la identidad de Lagrange en $(a,\xi)$ a las funciones $x = x(t)$, $z(t) = G(t,\xi)$ y sumando el resultado de aplicarla a las mismas funciones en $(\xi, b)$. Obtenemos:

$$\int_a^{\xi - 0} [x(t) . L[G(t,\xi)] - G(t,\xi) . L(x)]\, dt +$$

$$+ \int_{\xi+0}^{b} [x(t)\ L[G(t,\xi)] - G(t,\xi)\ L(x)]\, dt =$$

$$= \left[ p(t)\ (x(t)\ \frac{\partial G(t,\xi)}{\partial t} - x'(t) . G(t,\xi) \right]_a^{\xi - 0} +$$

$$+ \left[ p(t)\ (x(t)\ .\ \frac{\partial G(t,\xi)}{\partial t} - x'(t) . G(t,\xi) \right]_{\xi+0}^{b}$$

para todo $\xi \in (a,b)$. La ecuación (14) y la propiedad B de la función de Green, implican que la parte izquierda de la igualdad es igual a:

$$\int_a^b G(t,\xi)\ \varphi(t)\, dt.$$

Por otra parte, las propiedades A y D de la función de Green implican que la parte de la derecha es igual a $x(\xi)$. Obtenemos por tanto:

$$x(\xi) = \int_a^b G(t,\xi)\ \varphi(t)\, dt \qquad \xi \in (a,b)$$

y debido a que todas las funciones de la igualdad son continuas en $(a,b)$, la igualdad servirá también en a y b. Entonces, cambiando $\xi$ por t y viceversa:

$$x(t) = \int_a^b G(\xi, t)\ \varphi(\xi)\, d\xi$$

y por la propiedad C de la función de Green:

$$x(t) = \int_a^b G(t, \xi)\, \varphi(\xi) d\xi .$$

Teorema. - "La función $x(t) = \int_a^b G(t, \xi)\, \varphi(\xi) d\xi$ satisface la ecuación (14) y las condiciones frontera (6')".

Demostración. - Aplicando la definición de la función $G(t, \xi)$:

$$x(t) = -\frac{1}{C} x_2(t) \int_a^t x_1(\xi) . \varphi(\xi)\, d\xi - \frac{1}{C} x_1(t) \int_t^b x_2(\xi)\, \varphi(\xi) d\xi .$$

Derivando:

$$x'(t) = -\frac{1}{C} x_2'(t) \int_a^t x_1(\xi) . \varphi(\xi) d\xi - \frac{1}{C} x_2(t) x_1(t)\, \varphi(t) -$$

$$-\frac{1}{C} x_1'(t) \int_t^b x_2(\xi)\, \varphi(\xi) d\xi + \frac{1}{C} x_1(t)\, x_2(t)\, \varphi(t)$$

$$x'(t) = -\frac{1}{C} x_2'(t) \int_a^t x_1(\xi)\, \varphi(\xi) d\xi - \frac{1}{C} x_1'(t) \int_t^b x_2(\xi)\, \varphi(\xi) d\xi .$$

$$x'(t) = \int_a^{t-0} G_t(t, \xi)\, \varphi(\xi)\, d\xi + \int_{t+0}^b G_t(t, \xi)\, \varphi(\xi) d\xi$$

$$x'(t) = \int_a^b G_t(t, \xi)\, \varphi(\xi) d\xi .$$

la última igualdad se verifica ya que a pesar de ser $G_t$ discontinua en $t = \xi$, es una función acotada por la propiedad B.

Actuando de la misma forma, se obtiene:

$$[p(t)x'(t)]' = \int_a^b [p(t)\, G_t(t, \xi)]_t\, \varphi(\xi) d\xi + p(t)\, [G_t(t, \xi)\, \varphi(\xi)]_{\xi = x-0}^{\xi = x+0}$$

$$x'(t) = \int_a^{t-0} G_t(t, \xi)\, \varphi(\xi)\, d\xi + \int_{t+0}^{b} G_t(t, \xi).\, \varphi(\xi) d\xi .$$

y para $\delta > 0$, obtenemos la siguiente igualdad:

$$\frac{p(t+\delta).x'(t+\delta) - p(t)\,x'(t)}{\delta} =$$

$$= \int_a^t \frac{1}{\delta} [\, p(t+\delta) G_t(t+\delta, \xi) - p(t) G_t(t, \xi)\,]\, \varphi(\xi)\, d\xi +$$

$$+ \frac{1}{\delta} \int_t^{t+\delta} p(t+\delta) G_t(t+\delta, \xi)\, \varphi(\xi) d\xi - \frac{1}{\delta} \int_t^{t+\delta} p(t)\, G_t(t, \xi)\, \varphi(\xi) d\xi +$$

$$+ \int_{t+\delta}^{b} \frac{1}{\delta} [\, p(t+\delta)\, G_t(t+\delta, \xi) - p(t).\, G_t(t, \xi)\,]\, \varphi(\xi) d\xi$$

y cuando $\delta \downarrow 0$, la parte derecha convergerá a:

$$\int_a^t [\, p(t)\, G_t(t, \xi)\,]_t \cdot \varphi(\xi) d\xi + p(t)\, [\, G_t(t+0, t) - G_t(t, t+0)\,]\, \varphi(t) +$$

$$+ \int_t^b [\, p(t)\; G_t(t, \xi)\,]_t\; \varphi(\xi) d\xi$$

similarmente, cuando $\delta \uparrow 0$ tambien converge hacia el mismo límite el cociente:

$$\frac{p(t+\delta) x'(t+\delta) - p(t)\, x'(t)}{\delta}$$

por tanto, existe la primera derivada de $p(t).x'(t)$ y

$$\frac{d}{dt} [\, p(t) x'(t)\,] = \int_a^b [\, p(t)\, G_t(t, \xi)\,]_t\; \varphi(\xi)\; d\xi - \varphi(t).$$

Así, en virtud de $L\,[\, G_t(t, \xi)\,] = 0$, $x(t)$ es una solución de la ecuación $L\,(x) = -\varphi(t)$. Como $G(t, \xi)$ satisface las condiciones frontera prescritas para todo $\xi \in (a, b)$, tambien las satisface $x(t)$.

6.- Función de Creen generalizada.-

Este procedimiento es aplicable solamente cuando existe una solución no trivial $x_o(t) \not\equiv 0$ de la ecuación $L(x) = 0$, satisfaciendo a las condiciones frontera. En este caso, podemos suponer, sin pérdida de generalidad, que toda solución no trivial es un múltiplo de $x_o(t)$, ya que si existiesen dos soluciones no triviales linealmente independientes, entonces toda solución de la ecuación verificaría las condiciones frontera, por ser éstas lineales y homogeneas. Por lo que acabamos de ver, vamos a omitir esta eventualidad ya que en este caso las condiciones frontera no serían nada restrictivas.

Si $x(t)$ es solución de la ecuación no homogenea $L(x) = -\varphi(t)$ satisfaciendo las condiciones frontera, $\varphi(t)$ verificará:

$$\int_a^b \varphi(t) . x_o(t)\, dt = 0$$

pues por la formula de Green:

$$-\int_a^b x_o(t)\, \varphi(t) dt = \int_a^b \{ x_o(t) L(x) - x(t) L(x_o) \} dt = [\, p(t)(x_o(t)x'(t) - x_o'(t)x(t))\, ]_a^b = 0$$

y por las condiciones frontera la expresión anterior vale cero. Por otra parte, la solución $x(t)$ puede escribirse en la forma:

$$x(t) = z(t) + C\, x_o(t).$$

siendo $z(t)$, solución de $L(x) = -\varphi(t)$ satisfaciendo las condiciones frontera (la existencia de una solución se supone). Como $x_o(t) \not\equiv 0$ puede escogerse la constante C para que:

$$\int_a^b x(t) . x_o(t) dt = 0$$

Ahora, definimos como FUNCION DE CREEN GENERALIZADA una función definida en $(a,b) \times (a,b)$ satisfaciendo las condiciones:

(1). $G(t, \xi)$ continua en $(a,b) \times (a,b)$ y satisface las condiciones frontera para todo t.

(2). Si $\xi \neq t$, satisface la ecuación $L[G(t, \xi)] = x_o(t) \cdot x_o(\xi)$. Estando $G_t(t, \xi)$ acotada en $\xi \neq t$.

(3). (C) y (D)

(4).
$$\int_a^b G(t, \xi) \, x_o(t) \, dt = 0$$

Si la función generalizada de Green existe, analogamente a lo hecho anteriormente se prueba que toda solución del problema de valores frontera puede ponerse en la forma:

$$x(t) = \int_a^b G(t, \xi) \, \varphi(\xi) \, d\xi$$

# 13

# Sistemas de Ecuaciones Diferenciales

## L E C C I O N 13

## SISTEMAS DE ECUACIONES DIFERENCIALES

### 1.- Definiciones generales y condiciones de existencia de solución.-

Ya vimos en el capítulo 11, el teorema de existencia y uncidad de la solución del sistema de ecuaciones diferenciales

$$\left\{\begin{array}{l} \dfrac{dx_1}{dt} = f_1(t, x_1, x_2, \dots, x_n) \\ \dfrac{dx_2}{dt} = f_2(t, x_1, x_2, \dots, x_n) \\ - - - - - - - - - - - - - - - - \\ \dfrac{dx_n}{dt} = f_n(t, x_1, x_2, \dots, x_n) \end{array}\right. \tag{1}$$

que satisface las condiciones iniciales

$$x_i(t_0) = x_{i0}, \quad (i = 1, 2, \dots, n) \tag{2}$$

Recordemos que las condiciones suficientes para la existencia y unicidad dede la solución del sistema (1), con las condiciones (2), eran las siguientes:

a) Deben ser continuas todas las funciones $f_1, f_2, \dots, f_n$ en un entorno de las condiciones iniciales.

b) Se deben de cumplir las condiciones de Lipschitz para todas las funciones $f_1, f_2, \dots, f_n$, respecto de todas sus variables, a partir de la segunda, en el entorno anteriormente considerado.

La segunda condición puede sustituirse por otra menos exigente y más sencilla de probar, que es la existencia de las derivadas parciales:

$$\frac{\partial f_i}{\partial x_i} \quad (i, j = 1, 2, \dots, n)$$

acotadas en valor absoluto en dicho entorno.

Si representamos por $X(t)$ a la función vectorial n-dimensional de componentes $x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t)$, solución del sistema de ecuaciones diferenciales (1), éste se puede escribir de la forma

$$\frac{dX}{dt} = F(t, X)$$

siendo F una función vectorial n-dimensional de componentes $(f_1, f_2, \ldots, f_n)$.

Las condiciones iniciales se representarán en la forma $X(t_0) = X_0$, siendo $X_0$ un vector n-dimensional de componentes $(x_{10}, x_{20}, \ldots, x_{n0})$.

La solución X(t) del sistema de ecuaciones (1), determina en el espacio euclídeo de coordenadas t, $x_1, x_2, \ldots, x_n$ una curva llamada curva integral. Cumplidas las condiciones del teorema de existencia y unicidad, por cada punto de dicho espacio pasa una sola curva integral, formando el conjunto de éstas una familia de n parámetros, que pueden ser, por ejemplo, los valores iniciales $x_{10}, x_{20}, \ldots, x_{n0}$.

Veamos el caso particular de dos ecuaciones de primer orden; a este fin vamos a engendrar dicho sistema partiendo de una congruencia de curvas en el espacio. Se llama congruencia de curvas a todo conjunto de curvas con dos parámetros tales que por cada punto del espacio pase una única curva de la congruencia; será de la forma

$$c_1 = f(x, y, z) \qquad\qquad c_2 = \varphi(x, y, z)$$

Diferenciando ambas ecuaciones se obtiene el sistema

$$\left.\begin{aligned} f'_x . dx + f'_y . dy + f'_z . dz &= 0 \\ \varphi'_x . dx + \varphi'_y . dy + \varphi'_z . dz &= 0 \end{aligned}\right\} \quad \text{o sea}$$

$$\frac{dx}{\dfrac{D(f, \varphi)}{D(y, z)}} = \frac{dy}{\dfrac{D(f, \varphi)}{D(z, x)}} = \frac{dz}{\dfrac{D(f, \varphi)}{D(x, y)}} \tag{3}$$

o de otro modo.

$$\left.\begin{aligned} \frac{dy}{dx} &= y' = \frac{\dfrac{D(f, \varphi)}{D(z, x)}}{\dfrac{D(f, \varphi)}{D(y, z)}} = F_1(x, y, z) \\[2ex] \frac{dz}{dx} &= z' = \frac{\dfrac{D(f, \varphi)}{D(x, y)}}{\dfrac{D(f, \varphi)}{D(y, z)}} = F_2(x, y, z) \end{aligned}\right| \tag{4}$$

A la forma (3) la llamamos canónica y a la (4) forma normal.

2.- Método de reducción.-

Uno de los principales métodos de integración de sistemas de ecuaciones lineales como el (1), consiste en eliminar todas las funciones menos una, a partir de las ecuaciones del sistema (1) y de sus derivadas, obteniendo una ecuación diferencial de mayor orden con dicha función. Se integra esta ecuación con lo que se determina una de las funciones; las restantes funciones desconocidas se determinan, si es posible sin integración, partiendo de las ecuaciones originales y de las obtenidas por derivación. Veamos algunos ejemplos.

Ejemplo 1. Resolver el sistema:

$$\begin{cases} y' = 3x + y + z \\ z' = x - 2y - z \end{cases}$$

Sumando ambas ecuaciones se obtiene: $y' + z' = 4x - y$.

Derivando la primera: $y'' = 3 + y' + z'$

Sustituyendo en esta última la expresión anterior se obtiene

$y'' = 3 + (4x - y)$

$y'' + y = 4x + 3$ que integrada nos da:

$y = A \cos x + B \operatorname{sen} x + 4x + 3$

sustituyendo en la primera obtengo la otra función

$$z = y' - y - 3x = (B-A)\cos x - (A+B)\operatorname{sen} x - 7x + 1$$

Ejemplo 2. Resolver:

$$\begin{cases} 2x' + x + 3y' + y = e^{-t} \\ x' + 5x + y' + 7y = t \end{cases}$$

La primera ecuación menos dos veces la segunda nos da:

$$-9x + y' - 13y = e^{-t} - 2t$$

La primera ecuación por cinco menos la segunda nos da:

$$9x' + 14y' - 2y = 5.e^{-t} - 1$$

Sumando a esta última la derivada de la anterior obtenemos:

$$\frac{d^2y}{dt^2} + \frac{dy}{dt} - 2y = 4e^{-t} - t - 2$$

que integrada nos conduce a la siguiente expresión

$$y = c_1e^t + c_2e^{-2t} + \frac{t}{2} + \frac{5}{4} - 2e^{-t}$$

y la otra función sale:

$$x = \frac{1}{9}\left(\frac{dy}{dt} - 13y + 2t - e^{-t}\right) = -\frac{4}{3}c_1e^t - \frac{5}{3}c_2e^{-2t} - \frac{t}{2} - \frac{7}{4} + 3e^{-t}$$

Ejemplo 3. Resolver:

$$\begin{cases} \dfrac{d^2x}{dt^2} = y \\ \dfrac{d^2y}{dt^2} = x \end{cases}$$

Derivando la primera obtenemos $\frac{d^2y}{dt^2} = \frac{d^4x}{dt^4}$ y sustituyendo en la segunda, se obtiene $\frac{d^4x}{dt^4} = x$ que integrada conduce a:

$$x = c_1e^t + c_2e^{-t} + c_3 \cos t + c_4 \operatorname{sen} t$$

y sustituyendo en la primera obtenemos:

$$y = c_1e^t + c_2e^{-t} - c_3 \cos t - c_4 \operatorname{sen} t$$

3.- Generalización a más de dos funciones.-

Si tenemos el sistema de tres ecuaciones

$$\left.\begin{aligned} y' &= f_1(x, y, z, u) \\ z' &= f_2(x, y, z, u) \\ u' &= f_3(x, y, z, u) \end{aligned}\right| \qquad (5)$$

Derivamos la primera dos veces, y la segunda y tercera una vez, obteniendo:

$$\left.\begin{aligned} y'' &= F_1(x, y, z, u, y', z', u') \\ y''' &= \Phi_1(x, y, z, u, y', z', u', y'', z'', u'') \\ z'' &= F_2(x, y, z, u, y', z', u') \\ u'' &= F_3(x, y, z, u, y', z', u') \end{aligned}\right| \qquad (6)$$

De las siete ecuaciones de (5) y (6), eliminamos $z, z', z'', u, u', u''$, obteniendo una ecuación de tercer orden en y

$$y''' = \Phi_1(x, y, y', y'')$$

que integrada nos dará $y = F(x, c_1, c_2, c_3)$. Sustituyendo y é y' en (5) y en la primera de (6), se obtienen cuatro ecuaciones para determinar $z, u, z', u'$.

En general, un sistema de n ecuaciones conducirá a una de orden n, y por simple eliminación se determinarán las restantes funciones.

4.- Sistemas de orden superior.-

Sea el sistema siguiente:

$$\begin{cases} y^{(m} = f(x, y, y', \ldots, y^{(m-1}, z, z', \ldots, z^{(n-1}) \\ z^{(n} = \varphi(x, y, y', \ldots, y^{(m-1}, z, z', \ldots, z^{(n-1}) \end{cases}$$

Derivando la primera ecuación n veces (orden de la máxima derivada de z en la segunda) y derivando la segunda ecuación n-1 veces (orden de la máxima derivada de z en la primera), se obtienen $2+n+(n-1) = 2n+1$ ecuaciones para eliminar las 2n funciones $z, z', z'', \ldots, z^{2n-1}$, obteniendo una ecuación en y de orden m+n.

Ejemplo. Resolver:

$$\begin{cases} x'' - 2y' + 3x = 0 \\ y'' + x' - 2y = e^{2t} \end{cases}$$

Derivando la primera dos veces y la segunda una vez, eliminamos y:

$$\left.\begin{array}{l} x''' - 2y'' + 3x' = 0 \\ x^{Iv} - 2y''' + 3x'' = 0 \\ y''' + x'' - 2y' = 2e^{2t} \end{array}\right\} \text{se obtiene eliminando}$$

$$x^{Iv} + 3x'' - 6x = 4e^{2t}$$

5.- Utilización del operador D.

Si tenemos el sistema de ecuaciones lineales de coeficientes constantes, escrito simbólicamente utilizando el operador derivada D,

$$\begin{vmatrix} P_{11}(D)x + P_{12}(D)y + P_{13}(D)z = f_1(t) \\ P_{21}(D)x + P_{22}(D)y + P_{23}(D)z = f_2(t) \\ P_{31}(D)x + P_{32}(D)y + P_{33}(D)z = f_3(t) \end{vmatrix} \tag{7}$$

y llamamos $\Delta(D)$ al determinante (operador) del sistema

$$\Delta(D) = \begin{vmatrix} P_{11}(D) & P_{12}(D) & P_{13}(D) \\ P_{21}(D) & P_{22}(D) & P_{23}(D) \\ P_{31}(D) & P_{32}(D) & P_{33}(D) \end{vmatrix} \tag{8}$$

Se pueden eliminar las funciones $y, z$, aplicando a las tres ecuaciones (7) respectivamente, los operadores en D obtenidos al calcular los adjuntos $\alpha_{11}(D)$, $\alpha_{21}(D)$, $\alpha_{31}(D)$ de $P_{11}(D)$, $P_{21}(D)$, $P_{31}(D)$ y sumando. O sea, teniendo en cuenta las identidades siguientes:

$$\left.\begin{aligned} \alpha_{11}.P_{11} + \alpha_{21}.P_{21} + \alpha_{31}.P_{31} &= \Delta \\ \alpha_{11}.P_{12} + \alpha_{21}.P_{22} + \alpha_{31}.P_{32} &= 0 \\ \alpha_{11}.P_{13} + \alpha_{21}.P_{23} + \alpha_{31}.P_{33} &= 0 \end{aligned}\right\}$$

quedará la ecuación:

$$\Delta(D)x = \alpha_{11}.f_1 + \alpha_{21}.f_2 + \alpha_{31}.f_3$$

que es una ecuación diferencial en x de coeficientes constantes, de grado el grado de $\Delta(D)$. Las otras funciones $y, z$, se pueden hallar de modo similar o por eliminación de sus derivadas una vez hallada $x$.

Ejemplo. Resolver:

$$\begin{cases} 3x'' + 3x' + 2x + y'' + 2y' + 3y = e^t \\ 2x'' - x' - 2x + y'' + y' + y = 8 \end{cases}$$

Lo podemos escribir, utilizando el operador D, de la forma:

$$\begin{cases} (3D^2 + 3D + 2)x + (D^2 + 2D + 3)y = e^t \\ (2D^2 - D - 2)x + (D^2 + D + 1)y = 8 \end{cases}$$

$$\Delta(D) = \begin{vmatrix} 3D^2 + 3D + 2 & D^2 + 2D + 3 \\ 2D^2 - D - 2 & D^2 + D + 1 \end{vmatrix}$$

La ecuación que nos da x es:

$$\begin{vmatrix} 3D^2 + 3D + 2 & D^2 + 2D + 3 \\ 2D^2 - D - 2 & D^2 + D + 1 \end{vmatrix} x = \begin{vmatrix} e^t & D^2 + 2D + 3 \\ 8 & D^2 + D + 1 \end{vmatrix}$$

y desarrollando queda:

$$(D^4 + 3D^3 + 6D^2 + 12D + 8)x = 3e^t - 24$$

de la que obtenemos:

$$x = c_1 e^{-t} + c_2 . e^{-2t} + c_3 . \cos 2t + c_4 \operatorname{sen} 2t + \frac{e^t}{10} - 3$$

Del mismo modo, obtenemos para y la ecuación:

$$\begin{vmatrix} 3D^2 + 3D + 2 & D^2 + 2D + 3 \\ 2D^2 - D - 2 & D^2 + D + 1 \end{vmatrix} y = \begin{vmatrix} 3D^2 + 3D + 2 & e^t \\ 2D^2 - D - 2 & 8 \end{vmatrix}$$

y se obtiene:

$$(D^4 + 3D^3 + 6D^2 + 12D + 8)y = e^t + 16$$

e integrando sale:

$$y = k_1 e^{-t} + k_2 e^{-2t} + k_3 \cos 2t + k_4 \operatorname{sen} 2t + \frac{e^t}{30} + 2$$

reduciendo constantes de x é y, se obtiene:

$$k_1 = -c_1, \; k_2 = -\frac{8}{3} c_2, \; k_3 = -2(c_3+c_4), \; k_4 = 2(c_3-c_4)$$

6.- Aplicación de la transformada de Laplace a la resolución de sistemas lineales.-

Uno de los procedimientos más cómodos de resolver sistemas lineales, sobre todo si queremos hallar una solución particular para unas condiciones iniciales prefijadas, consiste en la aplicación de la transformación de Laplace a los mismos ya que así la operación derivar se transforma en multiplicar. Recordemos a este fin la transformada de Laplace de una derivada.

Si es

$$L[y(x)] = \int_0^\infty e^{-px} . y(x) dx = \eta(p)$$

$$L[y'(x)] = \int_0^\infty e^{-px} . y'(x) dx = [e^{-px} . y(x)]_0^\infty + p . \int_0^\infty e^{-px} . y(x) dx = p . \eta(p) - y(0)$$

Análogamente:

$$L[y''(x)] = p . L[y'(x)] - y'(0) = p^2 . \eta(p) - p\, y(0) - y'(0)$$

$$L[y'''(x)] = p . L[y''(x)] - y''(0) = p^3 . \eta(p) - p^2 . y(0) - p . y'(0) - y''(0)$$

y así sucesivamente.

Así pues, aplicando la transformada de Laplace a un sistema, se transformará el sistema en uno de ecuaciones lineales teniendo como incógnitas las transformadas de cada una de las funciones. Hallada la transformada inversa, obtendremos el sistema resuelto.

Ejemplo. Resolver el sistema:

$$\begin{cases} x' + 6x + 3y - 14z = 0 \\ y' - 4x - 3y + 8z = 0 \\ z' + 2x + y - 5z = \operatorname{sen} t \end{cases}$$

con las condiciones iniciales siguientes: para $t = 0$, $x(0) = 1$, $y(0) = -1$, $z(0) = 0$. Llamando a, b y c a las transformadas de Laplace de $x, y, z$ respectivamente, queda:

$$\left.\begin{array}{l} pa - 1 + 6a + 3b - 14c = 0 \\ pb - 1 - 4a - 3b + 8c = 0 \\ pc + 2a + b - 5c = \dfrac{1}{p^2+1} \end{array}\right\} \qquad \left\{\begin{array}{l} (p+6)a + 3b - 14c = 1 \\ -4a + (p-3)b + 8c = -1 \\ 2a + b + (p-5)c = \dfrac{1}{p^2+1} \end{array}\right.$$

y de aquí sale:

$$a = \frac{p^3 - 4p^2 + 3p + 12}{(p+1)(p-2)(p^2+1)} = -\frac{2}{3} \cdot \frac{1}{p+1} + \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{p-2} + \frac{p-5}{p^2+1}$$

La función inversa será:

$$x(t) = -\frac{2}{3} \cdot e^{-t} + \frac{2}{3} \cdot e^{2t} + \cos t - 5 \operatorname{sen} t$$

De modo similar hallaríamos $y(t)$ y $z(t)$.